

Problème n° 1 : système composé d'une tige et d'un demi-disque

Notions abordées

- ☞ Centre d'inertie
- ☞ Matrice d'inertie
- ☞ Moment cinétique - Moment dynamique
- ☞ Energie cinétique
- ☞ Théorème du moment dynamique
- ☞ Théorème de la résultante dynamique
- ☞ Intégrale première du mouvement

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec (O, \vec{z}_0) vertical ascendant, supposé galiléen. Le repère $R(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au solide (S) tel que (C, \vec{y}) soit porté par AB .

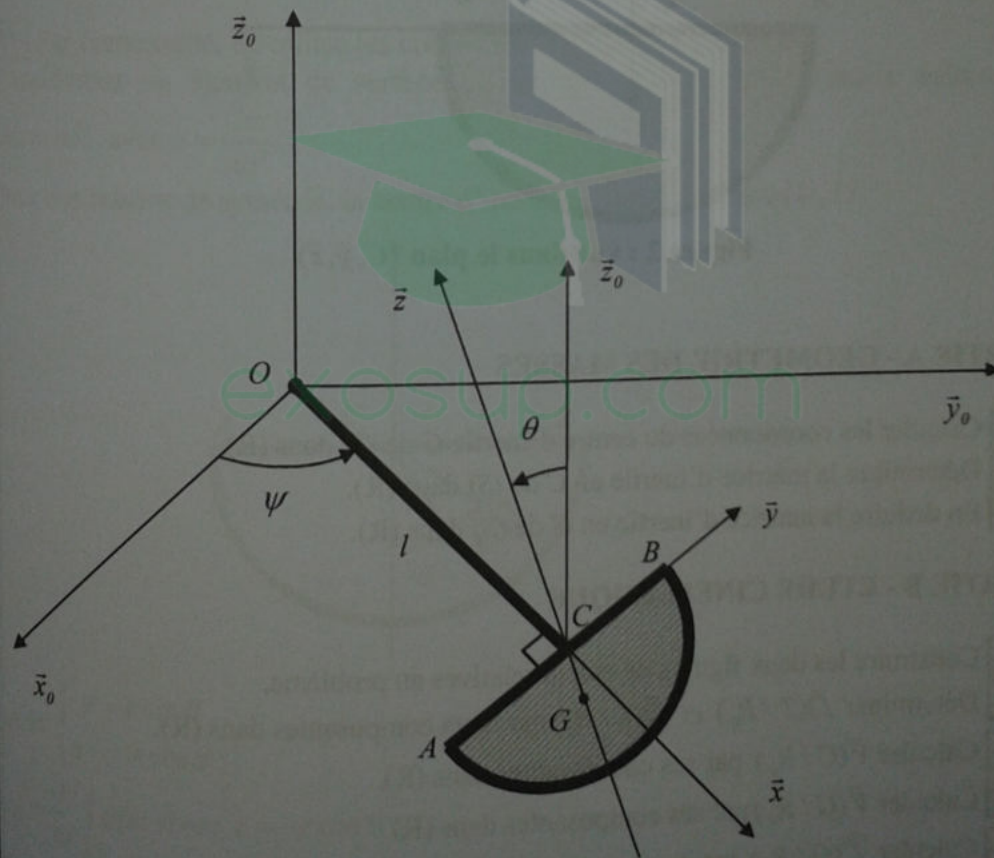


Figure 1 : description générale du système

Le système étudié est composé d'un demi-disque (S) homogène d'épaisseur négligeable, de masse m et de rayon a et d'une tige (T) infiniment mince de longueur l

et de masse négligeable.

La tige (T) est soudée au demi-disque en un point C de telle sorte que la liaison en C est telle que le plan de (S) reste vertical et constamment perpendiculaire à (T) elle-même confondue avec l'axe (O, \vec{x}) (voir figure 1). On désigne par G le centre d'inertie de (S) et par C le milieu du diamètre AB . On désigne par g l'accélération de la pesanteur.

On note : $\psi = \omega t = (\vec{x}_0, \vec{x})$ et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z})$.

On admettra que le torseur des actions de contact s'exerçant en C sur le solide (S) est :

$$[F_C]_C = \begin{cases} \vec{R}_C = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(C) = M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$$

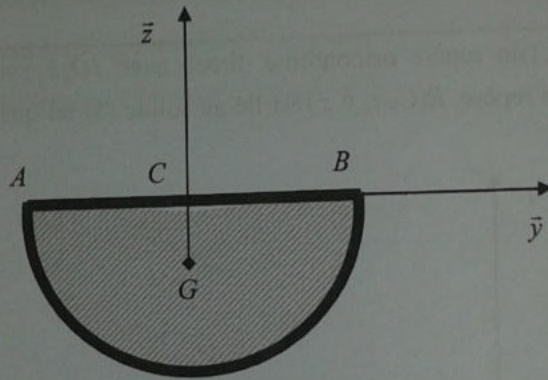


Figure 2 : vue dans le plan (C, \vec{y}, \vec{z})

PARTIE A - GEOMETRIE DES MASSES

- Q1-** Calculer les coordonnées du centre d'inertie G de (S) dans (R).
- Q2-** Déterminer la matrice d'inertie en C de (S) dans (R).
- Q3-** En déduire la matrice d'inertie en G de (S) dans (R).

PARTIE B - ETUDE CINEMATIQUE

- Q4-** Construire les deux figures de calcul relatives au problème.
- Q5-** Déterminer $\vec{\Omega}(T/R_0)$ et $\vec{\Omega}(S/R_0)$ par leurs composantes dans (R).
- Q6-** Calculer $\vec{V}(C/R_0)$ par ses composantes dans (R).
- Q7-** Calculer $\vec{V}(G/R_0)$ par ses composantes dans (R).
- Q8-** Calculer $\vec{\Gamma}(G/R_0)$ par ses composantes dans (R).

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

- Q9-** Calculer le moment cinétique en G de (S) par rapport à (R_0).

Q10- Calculer le moment dynamique en G de (S) par rapport à (R_0) .

Q11- Calculer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

Q12- Appliquer le théorème de la résultante dynamique à (S) et déterminer les expressions de Y et Z en fonction de m, g, a, l, θ, ψ et de leurs dérivées successives.

Q13- Appliquer le théorème du moment dynamique en G à (S) et déterminer l'équation différentielle du mouvement.

Q14- En déduire une intégrale première du mouvement de la forme $\dot{\theta}^2 = F(\theta)$. Donner une discussion rapide du mouvement.

Solution détaillée

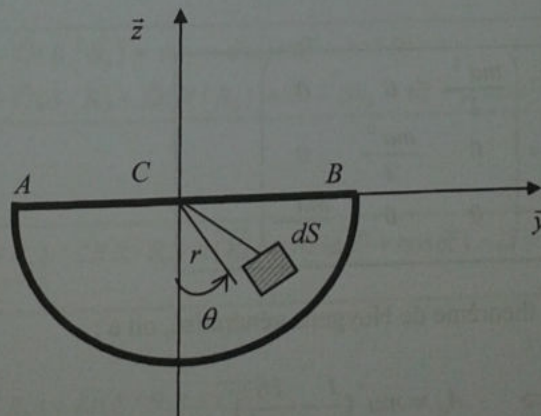
PARTIE A - GEOMETRIE DES MASSES

R1- Par commodité, on utilise les coordonnées polaires r et θ .

Considérons un élément de surface dS tel que $dS = r dr d\theta$ de masse élémentaire

$$dm = \sigma dS \text{ avec } \sigma = \frac{2m}{\pi a^2}.$$

Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie est situé sur l'axe (O, \vec{z}) :



$$\text{on a: } \begin{cases} y = r \sin \theta \\ z = -r \cos \theta \end{cases}$$

$$z_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} z dm \text{ Avec } z = -r \cos \theta$$

$$z_G = \frac{1}{S} \int_{(S)} z dS = -\frac{1}{S} \int_{(S)} r \cos \theta \cdot r dr d\theta = -\frac{1}{S} \int_0^a r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = -\frac{4a}{3\pi}$$

d'où :

$$G(0, 0, -\frac{4a}{3\pi})$$

R2- La base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est une base principale d'inertie \Rightarrow la matrice d'inertie de (S) en C dans $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est diagonale :

$$M_C^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Calcul de A

$$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = \sigma \int_{(S)} r^2 dS = \sigma \int_0^a r^3 dr \int_0^\pi d\theta = \frac{ma^2}{2} \quad \text{car } y = r \cos \theta$$

Calcul de B

$$B = \int_{(S)} z^2 dm = \frac{ma^2}{4} \quad \text{car } z = -r \cos \theta$$

Calcul C

$$C = \int_{(S)} y^2 dm = \frac{ma^2}{4} \quad \text{car } y = r \sin \theta$$

d'où :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

R3- Par application du théorème de Huygens généralisé, on a :

$$A = A_G + mz_G^2 \quad \Rightarrow \quad A_G = ma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$$

de même :

$$B = B_G + mz_G^2 \quad \Rightarrow \quad B_G = ma^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$$

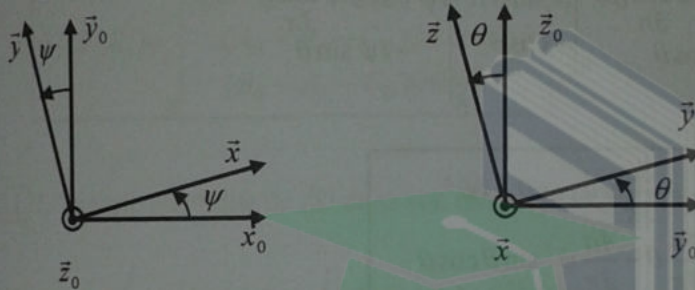
$$C = C_G = \frac{ma^2}{4}$$

Les axes $(G, \bar{x}), (G, \bar{y})$ et (G, \bar{z}) sont des axes principaux centraux d'inertie, donc la matrice d'inertie de (S) en G relativement à ces axes est diagonale :

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} ma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

PARTIE B - ETUDE CINEMATIQUE

R4-



R5-

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(T/R_0) &= \vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} (\sin \theta \vec{y} + \cos \theta \vec{z}) \\ \vec{\Omega}(S/R_0) &= \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\theta} \vec{x} + \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{x} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{y} + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z} \end{aligned}$$

R6-

$$\vec{V}(C/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O/R_0)}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overline{OC} = \dot{\psi} (\sin \theta \vec{y} + \cos \theta \vec{z}) \wedge l \vec{x} = l \dot{\psi} (\cos \theta \vec{y} - \sin \theta \vec{z})$$

R7-

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{CG}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{CG} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} & 0 \\ \dot{\psi} \sin \theta & 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta & -\frac{4a}{3\pi} \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{3\pi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \frac{4a}{3\pi} \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_R$$

d'où :

$$\vec{V}(G/R_0) = \begin{vmatrix} 0 \\ l\dot{\psi} \cos \theta + \\ -l\dot{\psi} \sin \theta \end{vmatrix}_R \begin{vmatrix} -\frac{4a}{3\pi} \dot{\psi} \sin \theta \\ \frac{4a}{3\pi} \dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{3\pi} \dot{\psi} \sin \theta \\ l\dot{\psi} \cos \theta + \frac{4a}{3\pi} \dot{\theta} \\ -l\dot{\psi} \sin \theta \end{vmatrix}_R$$

$$\boxed{\text{R8}} \quad \vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{vmatrix} -\frac{4a}{3\pi} \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ -l\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{4a}{3\pi} \ddot{\theta} + \\ -l\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \end{vmatrix}_R \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \wedge \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix}_R \begin{vmatrix} -\frac{4a}{3\pi} \dot{\psi} \sin \theta \\ l\dot{\psi} \cos \theta + \frac{4a}{3\pi} \dot{\theta} \\ -l\dot{\psi} \sin \theta \end{vmatrix}_R$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{vmatrix} -\frac{8a}{3\pi} \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - l\dot{\psi}^2 \\ \frac{4a}{3\pi} \ddot{\theta} - \frac{4a}{3\pi} \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{4a}{3\pi} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \end{vmatrix}_R$$

PARTIE C - ETUDE CINÉTIQUE

R9 Le moment cinétique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} ma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= ma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) \dot{\theta} \vec{x} + ma^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) \dot{\psi} \sin \theta \vec{y} + \frac{ma^2}{4} \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}$$

soit en posant $A_G = ma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$; $B_G = ma^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$ et $C_G = \frac{ma^2}{4}$:

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = A_G \dot{\theta} \vec{x} + B_G \dot{\psi} \sin \theta \vec{y} + C_G \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}$$

R10- Le moment dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_G(S/R_0) &= \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S/R_0) \\ &= \begin{vmatrix} A_G \ddot{\theta} & \dot{\theta} & A_G \dot{\theta} \\ B_G \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + & \dot{\psi} \sin \theta \wedge & B_G \dot{\psi} \sin \theta \\ -C_G \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \theta & C_G \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix}_R \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \begin{vmatrix} A_G \ddot{\theta} + (C_G - B_G) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ (A_G + B_G - C_G) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ (B_G - A_G - C_G) \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}_R$$

R11- L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\begin{aligned} E_C(S/R_0) &= \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2} {}^T \vec{\Omega}(S/R_0) M_G^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/R_0) &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{4a}{3\pi} \right)^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{4a}{3\pi} \right)^2 \dot{\theta}^2 \right] = \frac{8}{9\pi^2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) m a^2 \\ \frac{1}{2} {}^T \vec{\Omega}(S/R_0) M_G^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0) &= \frac{1}{2} (\dot{\theta}, \dot{\psi} \sin \theta, \dot{\psi} \cos \theta) \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & B_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{A_G}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{B_G}{2} (\dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{C_G}{2} (\dot{\psi} \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$E_C(S/R_0) = \frac{8}{9\pi^2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) m a^2 + \frac{A_G}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{B_G}{2} (\dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{C_G}{2} (\dot{\psi} \cos \theta)^2$$

soit :

$$E_C(S/R_0) = \frac{m a^2}{4} \left(\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{2} \right)$$

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

R12- Théorème de la résultante dynamique appliqué à (S) :

$$\vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{\Gamma}(G/R_0) \Leftrightarrow -mg\vec{z}_0 + X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} = m\vec{\Gamma}(G/R_0)$$

$$\Leftrightarrow -mg(\cos\theta\vec{e} + \sin\theta\vec{y}) + X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} = m\vec{\Gamma}(G/R_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -\frac{8ma}{3\pi}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\psi}^2 & (1) \\ Y - mg\sin\theta = \frac{4ma}{3\pi}\ddot{\theta} - \frac{4ma}{3\pi}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta & (2) \\ Z - mg\cos\theta = \frac{4ma}{3\pi}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) & (3) \end{cases}$$

R13- Théorème du moment dynamique appliqué à (S) en G :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \Sigma\vec{M}(\vec{F}_{ext}) = \underbrace{\vec{M}_G(\vec{P})}_{=\vec{0}} + \vec{M}(C) + \vec{GC} \wedge \vec{R}_C$$

$$\vec{M}(C) + \vec{GC} \wedge \vec{R}_C = \begin{vmatrix} 0 & M + \vec{GC} \wedge \vec{R}_C \\ N & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ N & \frac{4a}{3\pi} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Y\frac{4a}{3\pi} \\ M + X\frac{4a}{3\pi} \\ N \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} A_G\ddot{\theta} + (C_G - B_G)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta = -Y\frac{4a}{3\pi} & (4) \\ (A_G + B_G - C_G)\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta = M + X\frac{4a}{3\pi} & (5) \\ (B_G - A_G - C_G)\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta = N & (6) \end{cases}$$

or d'après (2), on a :

$$Y = mg\sin\theta + \frac{4ma}{3\pi}\ddot{\theta} - \frac{4ma}{3\pi}\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta$$

et en reportant l'expression de Y dans (4), il vient :

$$\left(A_G + \frac{16ma^2}{9\pi^2}\right)\ddot{\theta} + \left(C_G - B_G - \frac{16ma^2}{9\pi^2}\right)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{4mga}{3\pi}\sin\theta = 0$$

soit en remplaçant A_G , B_G et C_G par leurs expressions en fonction de m et a :

$$\frac{ma^2}{2} \ddot{\theta} + \frac{4mga}{3\pi} \sin \theta = 0 \quad (7)$$

R14 En multipliant les deux membres de l'équation (7) par $2\dot{\theta}dt$ et en intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{ma^2}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{8mga}{3\pi} \cos \theta = Cte = K$$

d'où l'intégrale première du mouvement :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2K}{ma^2} + \frac{16g}{3\pi a} \cos \theta \quad (8)$$

Discussion :

- si $\frac{2K}{ma^2} > \frac{16g}{3\pi a}$: le second membre de (8) est toujours positif, quel que soit θ ,

θ peut donc varier entre $-\infty$ et $+\infty$. $\dot{\theta}$ ne s'annulera jamais et le solide (S) tournera toujours dans le même sens autour de OC.

- si $\frac{2K}{ma^2} < -\frac{16g}{3\pi a}$: le second membre de (8) est toujours négatif et il n'y a pas de mouvement possible. On ne peut avoir que $\theta = Cte = 0$.

- si $-\frac{16g}{3\pi a} < \frac{2K}{ma^2} < \frac{16g}{3\pi a}$: le second membre de (8) est positif pour θ compris

entre $-\theta_m$ et $+\theta_m$, θ_m étant donné par : $\theta_m = \text{Arc cos} \left(\frac{-3\pi K}{8mga} \right)$. On aura un

mouvement périodique en θ qui oscillera entre $-\theta_m$ et $+\theta_m$. Les oscillations de θ ne seront sinusoïdales que si θ_m est petit.

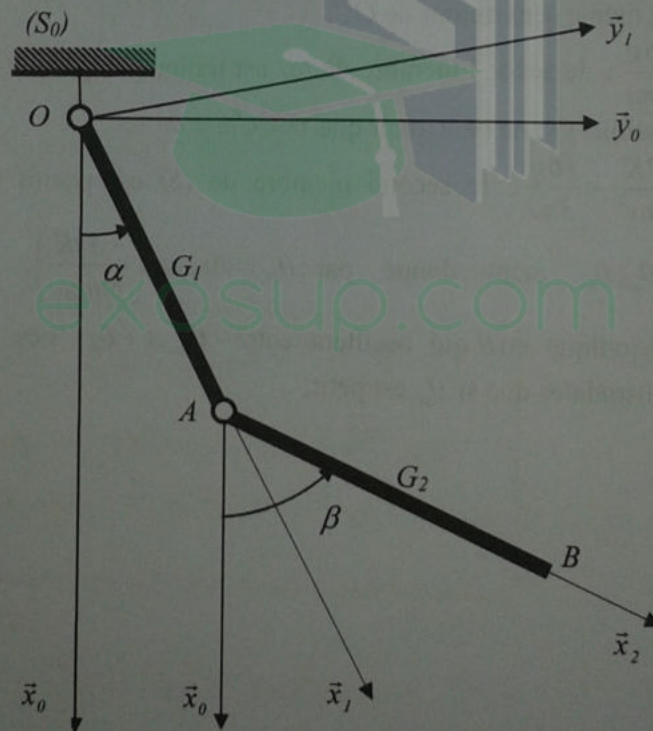
Problème n° 2 : oscillations d'un double pendule - acte I (étude dynamique)

Notions abordées

- ☞ Torseur cinématique
- ☞ Centre d'inertie
- ☞ Matrice d'inertie
- ☞ Torseur cinétique
- ☞ Torseur dynamique
- ☞ Théorème du moment dynamique
- ☞ Pulsation propre

On considère un double pendule (Σ) constitué de deux tiges (OA) et (AB) :

- La tige OA , de longueur L et de masse m est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (S_0).
- La tige AB , de longueur L et de masse m est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec la tige OA .



On considère les trois repères suivants (voir figure) :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (S_0).
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié à la tige OA tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et $\overline{OA} = L\vec{x}_1$.
- $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est lié à la tige AB tel que $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ et $\overline{AB} = L\vec{x}_2$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

- Q1-** Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinématique de la tige (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- Q2-** Déterminer les éléments de réduction en G_1 du torseur cinématique de la tige (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_1) .
- Q3-** Déterminer les éléments de réduction en G_2 du torseur cinématique de la tige (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

- Q4-** Déterminer la position du centre d'inertie G du système.
- Q5-** Déterminer la matrice d'inertie en O de la tige (S_1) relativement à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.
- Q6-** Trouver la matrice d'inertie en G_2 de la tige (S_2) relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

- Q7-** Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinétique de la tige (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- Q8-** Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dynamique de la tige (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- Q9-** Déterminer les éléments de réduction en O du torseur cinétique de la tige (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- Q10-** Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dynamique de la tige (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- Q11-** Déterminer le torseur cinétique en O du double pendule dans son mouvement par rapport à (R_0) .

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

- Q12-** En appliquant le théorème du moment dynamique en O à (\mathcal{S}) , écrire une première équation du mouvement.
- Q13-** En appliquant le théorème du moment du moment dynamique en A à (\mathcal{S}) , écrire une deuxième équation du mouvement.
- Q14-** Que deviennent ces équations lorsque les angles α et β sont de faibles amplitudes ?
- Q15-** Calculer alors les pulsations propres du système.

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Les éléments de réduction en O du torseur cinématique $[\mathcal{G}(OA/R_0)]$ de la tige (OA) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[\mathcal{G}(OA/R_0)]_O = \begin{cases} \vec{\Omega}(OA/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(O \in OA/R_0) = \vec{0} \end{cases}$$

R2- Les éléments de réduction en G_1 du torseur cinématique $[\mathcal{G}(OA/R_0)]$ de la tige (OA) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[\mathcal{G}(OA/R_0)]_{G_1} = \begin{cases} \vec{\Omega}(OA/R_0) \\ \vec{V}(G_1 \in OA/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\Omega}(OA/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0$$

et

$$\vec{V}(G_1 \in OA/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{L}{2} \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \frac{L}{2} (\dot{\alpha}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) = \frac{L}{2} \dot{\alpha}\vec{y}_1$$

d'où :

$$[\mathcal{G}(OA/R_0)]_{G_1} = \begin{cases} \vec{\Omega}(OA/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G_1 \in OA/R_0) = \frac{L}{2} \dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{cases}$$

R3- Les éléments de réduction en G_2 du torseur cinématique $[\mathcal{G}(AB/R_0)]$ de la tige (AB) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[\mathcal{G}(AB/R_0)]_{G_2} = \begin{cases} \vec{\Omega}(AB/R_0) \\ \vec{V}(G_2 \in AB/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\Omega}(AB/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\beta}\vec{z}_2$$

et

$$\begin{aligned} \vec{V}(G_2 \in AB/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OG_2}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2}}{dt} \right]_{R_0} = L \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} + \frac{L}{2} \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_0} \\ &= L(\dot{\alpha}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1) + \frac{L}{2}(\dot{\beta}\vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2) = L\dot{\alpha}\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2 \end{aligned}$$

d'où :

$$[\mathcal{G}(AB/R_0)] = \begin{cases} \vec{\Omega}(AB/R_0) = \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ \vec{V}(G_2 \in AB/R_0) = L\dot{\alpha} \vec{y}_1 + \frac{L}{2} \dot{\beta} \vec{y}_2 \end{cases}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R4 La position du centre d'inertie G du système est donnée par :

$$\vec{OG} = \frac{m\vec{OG}_1 + m\vec{OG}_2}{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \vec{x}_1 + L\vec{x}_1 + \frac{L}{2} \vec{x}_2 \right) = \frac{L}{4} (3\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

R5 La matrice d'inertie en O de la tige (OA) relativement à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est :

$$M_O^{(OA)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$$

en effet, si P est un point de la tige (OA) alors $P(x, 0, 0)$ on en déduit que tous les produits d'inertie sont nuls ainsi que $A_1 = I_{Ox_1}$.

Par ailleurs :

$$B_1 = C_1 = \int_{P \in (OA)} x^2 dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{mL^2}{3} \text{ car } \lambda = \frac{m}{L}$$

R6 La matrice d'inertie en G_2 de la tige (AB) relativement à la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est :

$$M_{G_2}^{(AB)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)}$$

en effet, si P est un point de la tige (AB) alors on a : $P(x, 0, 0)$ on en déduit que tous les produits d'inertie sont nuls ainsi que $A_2 = I_{Ox_2}$.

Par ailleurs :

$$B_2 = C_2 = \int_{P \in (AB)} x^2 dm = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{mL^2}{12} \text{ car } \lambda = \frac{m}{L}$$

PARTIE C - ETUDE CINÉTIQUE

R7- Les éléments de réduction en O du torseur cinétique $[C(OA/R_0)]$ de la tige (OA) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[C(OA/R_0)] = \begin{cases} m\vec{V}(G_1/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(OA/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\vec{\sigma}_O(OA/R_0) = M_O^{(OA)} \vec{\Omega}(OA/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{3} \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

d'où :

$$[C(OA/R_0)] = \begin{cases} m\vec{V}(G_1/R_0) = m \frac{L}{2} \ddot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}_O(OA/R_0) = \frac{mL^2}{3} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{cases}$$

R8- Les éléments de réduction en O du torseur dynamique $[D(OA/R_0)]$ de la tige (OA) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[D(OA/R_0)] = \begin{cases} m\vec{\Gamma}(G_1/R_0) \\ \vec{\delta}_O(OA/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(G_1/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G_1/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \frac{L}{2} \ddot{\alpha} \vec{y}_1 + \frac{L}{2} \dot{\alpha} \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = \frac{L}{2} \ddot{\alpha} \vec{y}_1 + \frac{L}{2} \dot{\alpha} (\dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1)$$

$$= \frac{L}{2} \ddot{\alpha} \vec{y}_1 - \frac{L}{2} \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}_O(OA/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(OA/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \frac{mL^2}{3} \ddot{\alpha} \vec{z}_0$$

d'où :

$$[D(OA/R_0)] = \begin{cases} m\vec{\Gamma}(G_1/R_0) = \frac{mL}{2} \ddot{\alpha} \vec{y}_1 - \frac{mL}{2} \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1 \\ \vec{\delta}_O(OA/R_0) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\alpha} \vec{z}_0 \end{cases}$$

R9- Les éléments de réduction en O du torseur cinétique $[C(AB/R_0)]$ de la tige (AB) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont donnés par :

$$[C(AB/R_0)] = \begin{cases} m\vec{V}(G_2/R_0) \\ \vec{\sigma}_O(AB/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O(AB/R_0) &= \vec{\sigma}_{G_2}(AB/R_0) + m\vec{V}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2O} \\ m\vec{V}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2O} &= m(L\dot{\alpha}\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2) \wedge (-\frac{L}{2}\vec{x}_2 - L\vec{x}_1) \\ &= -\frac{mL^2}{2}\dot{\alpha}(\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2) - mL^2\dot{\alpha}(\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_1) - \frac{mL^2}{4}\dot{\beta}(\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2) - \frac{mL^2}{2}\dot{\beta}(\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_2 = -\sin(\alpha - \beta + \frac{\pi}{2})\vec{z}_0 = -\cos(\beta - \alpha)\vec{z}_0 \\ \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_1 = -\vec{z}_0 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2 = -\vec{z}_0 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_1 = -\sin(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha)\vec{z}_0 = -\cos(\beta - \alpha)\vec{z}_0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$m\vec{V}(G_2/R_0) \wedge \overrightarrow{G_2O} = m\dot{\beta}\frac{L^2}{4}\vec{z}_0 + m\dot{\beta}\frac{L^2}{2}\cos(\beta - \alpha)\vec{z}_0 + m\dot{\alpha}\frac{L^2}{2}\cos(\beta - \alpha)\vec{z}_0 + m\dot{\alpha}L^2\vec{z}_0$$

par ailleurs :

$$\vec{\sigma}_{G_2}(AB/R_0) = M_{G_2}^{(AB)} \vec{\Omega}(AB/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{12} \dot{\beta} \vec{z}_0$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_O(AB/R_0) = \frac{mL^2}{12} \dot{\beta} \vec{z}_0 + m\dot{\beta}\frac{L^2}{4}\vec{z}_0 + m\dot{\beta}\frac{L^2}{2}\cos(\beta - \alpha)\vec{z}_0 + m\dot{\alpha}\frac{L^2}{2}\cos(\beta - \alpha)\vec{z}_0 + m\dot{\alpha}L^2\vec{z}_0$$

soit :

$$\vec{\sigma}_O(AB/R_0) = \frac{mL^2}{2} \left[\dot{\beta} \left(\frac{2}{3} + \cos(\beta - \alpha) \right) + \dot{\alpha} (2 + \cos(\beta - \alpha)) \right] \vec{z}_0$$

R10 Les éléments de réduction en O du torseur dynamique $[D(AB/R_0)]$ de la tige (AB) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[D(AB/R_0)]_O = \begin{cases} m\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \\ \vec{\delta}_O(AB/R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(G_2/R_0) &= \left[\frac{d\vec{V}(G_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \left(L\dot{\alpha}\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2 \right)}{dt} \right]_{R_0} \\ &= L\ddot{\alpha}\vec{y}_1 + L\dot{\alpha} \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} + \frac{L}{2}\ddot{\beta}\vec{y}_2 + \frac{L}{2}\dot{\beta} \left[\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{R_0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{d\bar{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\alpha} \bar{z}_0 \wedge \bar{y}_1 = -\dot{\alpha} \bar{x}_1 \\ \left[\frac{d\bar{y}_2}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\beta} \bar{z}_0 \wedge \bar{y}_2 = -\dot{\beta} \bar{x}_2 \end{cases}$$

d'où :

$$\bar{\Gamma}(G_2 / R_0) = L(-\dot{\alpha}^2 \bar{x}_1 + \dot{\alpha} \dot{\beta} \bar{y}_1) + \frac{L}{2} (\dot{\beta} \dot{\beta}_2 - \dot{\beta}^2 \bar{x}_2)$$

comme O est un point fixe par rapport à (R_0) alors :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_O(AB / R_0) &= \left[\frac{\bar{\sigma}_O(AB / R_0)}{dt} \right]_{R_0} \\ &= mL^2 \left[\frac{\dot{\beta}}{3} + \ddot{\alpha} + \left(\frac{\dot{\beta} + \ddot{\alpha}}{2} \right) \cos(\beta - \alpha) - \frac{(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)}{2} \sin(\beta - \alpha) \right] \bar{z}_0 \end{aligned}$$

R11- Le torseur cinétique en O du double pendule dans son mouvement par rapport (R_0) est :

$$[C(\Sigma / R_0)] = \begin{cases} m\bar{V}(G / R_0) \\ \bar{\sigma}_O(\Sigma / R_0) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{V}(G / R_0) &= \left[\frac{d\overline{OG}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(\frac{L}{4} (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \right)}{dt} \right]_{R_0} \\ &= \frac{3}{4} L \left[\frac{d\bar{x}_1}{dt} \right]_{R_0} + \frac{L}{4} \left[\frac{d\bar{x}_2}{dt} \right]_{R_0} = \frac{3}{4} L (\dot{\alpha} \bar{z}_0 \wedge \bar{x}_1) + \frac{L}{4} (\dot{\beta} \bar{z}_0 \wedge \bar{x}_2) \\ &= \frac{3}{4} L \dot{\alpha} \bar{y}_1 + \frac{L}{4} \dot{\beta} \bar{y}_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_O(\Sigma / R_0) &= \bar{\sigma}_O(OA / R_0) + \bar{\sigma}_O(AB / R_0) \\ &= \frac{mL^2}{3} \dot{\alpha} \bar{z}_0 + \frac{mL^2}{2} \left[\dot{\beta} \left(\frac{2}{3} + \cos(\beta - \alpha) \right) + \dot{\alpha} (2 + \cos(\beta - \alpha)) \right] \bar{z}_0 \\ &= \left[\frac{4}{3} mL^2 \dot{\alpha} + \frac{mL^2}{3} \dot{\beta} + \frac{mL^2}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\beta - \alpha) \right] \bar{z}_0 \end{aligned}$$

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

R12- Le théorème du moment dynamique appliqué en O à (Σ) en projection sur \vec{z}_0 donne :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_O(\Sigma / R_0) &= \vec{z}_0 \cdot (\vec{M}_O(S_0 \rightarrow OA) + mg\vec{x}_0 \wedge (\vec{G}_1\vec{O} + \vec{G}_2\vec{O})) \\ &= mg \left(-\frac{L}{2} \sin \alpha - L \sin \alpha - \frac{L}{2} \sin \beta \right) \\ &= -mgL \left(\frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \beta \right) \end{aligned}$$

par ailleurs :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_O(S_1 / R_0) &= \frac{mL^2}{3} \ddot{\alpha} \\ \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_O(S_2 / R_0) &= mL^2 \left[\frac{\ddot{\beta}}{3} + \ddot{\alpha} + \left(\frac{\ddot{\beta} + \ddot{\alpha}}{2} \right) \cos(\beta - \alpha) - \frac{(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)}{2} \sin(\beta - \alpha) \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_O(\Sigma / R_0) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\alpha} + mL^2 \left[\frac{\ddot{\beta}}{3} + \ddot{\alpha} + \left(\frac{\ddot{\beta} + \ddot{\alpha}}{2} \right) \cos(\beta - \alpha) - \frac{(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)}{2} \sin(\beta - \alpha) \right]$$

d'où l'expression du théorème du moment dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{mL}{3} \ddot{\alpha} + mL \left[\frac{\ddot{\beta}}{3} + \ddot{\alpha} + \left(\frac{\ddot{\beta} + \ddot{\alpha}}{2} \right) \cos(\beta - \alpha) - \frac{(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)}{2} \sin(\beta - \alpha) \right] &= -mgL \left(\frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \beta \right) \\ \frac{4}{3} mL \ddot{\alpha} + \frac{mL}{2} \ddot{\beta} + \frac{mL}{2} (\ddot{\beta} + \ddot{\alpha}) \cos(\beta - \alpha) - \frac{mL}{2} (\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2) \sin(\beta - \alpha) &= -3mg \frac{L}{2} \sin \alpha - mg \frac{L}{2} \sin \beta \end{aligned}$$

D'où enfin :

$$8\alpha + 2\beta + 3\alpha \cos(\beta - \alpha) + 3\beta \cos(\beta - \alpha) - 3\beta^2 \sin(\beta - \alpha) + 3\alpha^2 \sin(\beta - \alpha) + 9\frac{g}{L} \sin \alpha + 3\frac{g}{L} \sin \beta = 0$$

(1)

R13- Le théorème du moment dynamique appliqué en A à (AB) en projection sur \vec{z}_0 donne :

$$\begin{aligned} \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_A(AB / R_0) &= \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_A(\overline{AB} \rightarrow AB) \\ &= \vec{z}_0 \cdot (mg\vec{x}_0 \wedge \vec{G}_2\vec{A}) \\ &= -mg \frac{L}{2} \sin \beta \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_A(AB/R_0) &= \vec{z}_0 \cdot \left(\vec{\delta}_O(AB/R_0) + m\vec{\Gamma}(G_2/R_0) \wedge \vec{OA} \right) \\ &= \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_O(AB/R_0) + m\vec{z}_0 \cdot \left[L \left(\ddot{\alpha} \vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2 \vec{x}_1 + \frac{1}{2} (\ddot{\beta} \vec{y} - \dot{\beta}^2 \vec{x}_2) \right) \wedge L \vec{x}_1 \right] \\ &= mL^2 \left(\frac{2}{3} \ddot{\beta} + \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + \dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) \right)\end{aligned}$$

d'où :

$$mL^2 \left(\frac{2}{3} \ddot{\beta} + \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + \dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) \right) = -mg \frac{L}{2} \sin \beta$$

soit :

$$2\ddot{\beta} + 3\ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + 3\dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) + 3\frac{g}{L} \sin \beta = 0 \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont les équations du mouvement. Si on retranche (2) de (1), on obtient alors les deux équations :

$$\begin{cases} 8\ddot{\alpha} + 3\ddot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - 3\dot{\beta}^2 \sin(\beta - \alpha) + 9\frac{g}{L} \sin \alpha = 0 \\ 2\ddot{\beta} + 3\ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) + 3\dot{\alpha}^2 \sin(\beta - \alpha) + 3\frac{g}{L} \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

R14 Lorsque les amplitudes d'oscillation du système sont faibles (α et β petits), on développe les sinus et cosinus intervenant dans les équations précédentes et on ne garde que les termes d'ordre 1 en α, β, \dots . Il reste alors :

$$\begin{cases} 8\ddot{\alpha} + 3\ddot{\beta} + 9\frac{g}{L} \alpha = 0 \\ 3\ddot{\alpha} + 2\ddot{\beta} + 3\frac{g}{L} \alpha = 0 \end{cases} \quad (4)$$

R15 Pour obtenir les pulsations propres, on cherche si le système (4) peut avoir une solution de la forme :

$$\alpha = A \cos(\Omega t + \Phi) \quad , \quad \beta = B \cos(\Omega t + \Phi)$$

les amplitudes A et B sont données par le système d'équations :

$$\begin{cases} \left(-8\Omega^2 + 9\frac{g}{L} \right) A - 3\Omega^2 B = 0 \\ -3\Omega^2 A + \left(-2\Omega^2 + 3\frac{g}{L} \right) B = 0 \end{cases} \quad (5)$$

En écrivant que le déterminant de (5) doit être nul pour que ce système ait des solutions non triviales, on obtient l'équation aux pulsations propres :

$$\left(-8\Omega^2 + 9\frac{g}{L}\right)\left(-2\Omega^2 + 3\frac{g}{L}\right) - 9\Omega^4 = 0$$

soit :

$$7\Omega^4 - 42\frac{g}{L}\Omega^2 + 27\frac{g^2}{L^2} = 0 \quad (6)$$

Les solutions de (6) sont :

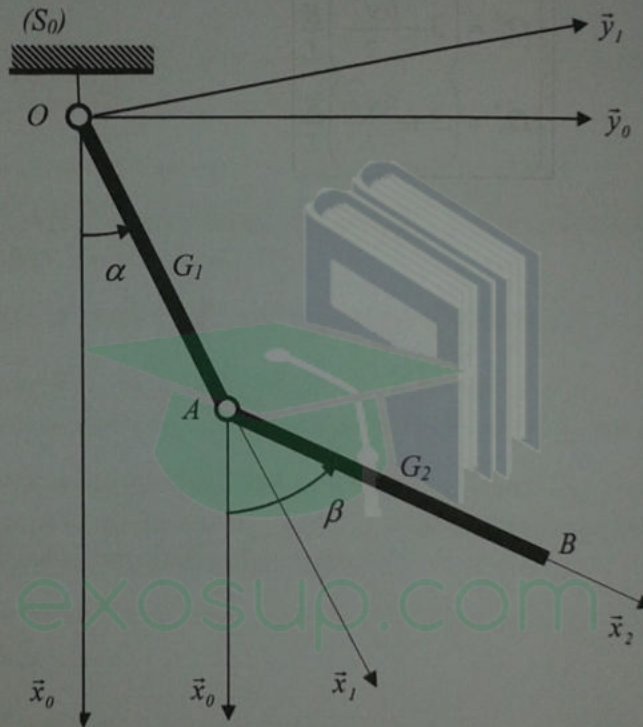
$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \left(3 - \frac{6\sqrt{7}}{7}\right) \frac{g}{L} \\ \Omega_2^2 = \left(3 + \frac{6\sqrt{7}}{7}\right) \frac{g}{L} \end{cases}$$

Problème n° 3 : oscillations d'un double pendule - acte II (étude énergétique)

Notions abordées

- ☞ Puissance des actions mécaniques
- ☞ Energie cinétique
- ☞ Théorème de l'énergie cinétique
- ☞ Intégrale première de l'énergie cinétique

Le but de ce problème est d'étudier le double pendule (voir problème n° 2) sous l'aspect énergétique. On reprend donc le même énoncé que le problème précédent.



On considère un double pendule (Σ) constitué de deux tiges identiques $(OA) = (S_1)$ et $(AB) = (S_2)$:

- La tige OA , de longueur L et de masse m est en liaison pivot parfaite d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (S_0) . On définit la longueur de cette tige par $\overline{OA} = L\vec{x}_1$ et sa position angulaire est repéré par le paramètre α , tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- La tige AB , de longueur L et de masse m est en liaison pivot parfaite d'axe (A, \vec{z}_0) avec la tige OA . On définit la longueur de cette tige par $\overline{AB} = L\vec{x}_2$ et sa position angulaire est repéré par le paramètre β , tel que $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.

On définit G_1 et G_2 comme les centres d'inertie des tiges (S_1) et (S_2) , situés respectivement au milieu de OA et AB .

On désigne par $\vec{g} = g\vec{x}_0$, le vecteur accélération de la pesanteur.

Ces tiges oscillent dans le plan vertical $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ du repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, lié au bâti (S_0) et supposé être galiléen.

PARTIE A - CALCUL DES PUISSANCES

Déterminer les puissances des actions mécaniques suivantes :

Q1- Action mécanique de (S_0) sur (S_1) , dans le mouvement de (S_1) par rapport à (R_0) .

Q2- Action mécanique de (S_1) sur (S_2) , dans le mouvement de (S_2) par rapport à (R_0) .

Q3- Action mécanique de (S_1) sur (S_2) , dans le mouvement de (S_2) par rapport à (R_1) .

Q4- Action mécanique de la pesanteur sur (S_1) , dans le mouvement de (S_1) par rapport à (R_0) .

Q5- Action mécanique de la pesanteur sur (S_2) , dans le mouvement de (S_2) par rapport à (R_0) .

PARTIE B - CALCUL DES ENERGIES CINETIQUES

Q6- Calculer l'énergie cinétique de (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

Q7- Calculer l'énergie cinétique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

Q8- Calculer l'énergie cinétique de $(\Sigma) = (S_1 + S_2)$ dans son mouvement par rapport à (R_0) .

PARTIE C - APPLICATION DU THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

Q9- Ecrire l'équation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la tige (S_2) , dans son mouvement par rapport à (R_0) .

Q10- Ecrire l'équation traduisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système $(\Sigma) = (S_1 + S_2)$, dans son mouvement par rapport à (R_0) .

Q11- Ecrire l'intégrale première de l'énergie cinétique appliquée au système $(\Sigma) = (S_1 + S_2)$ dans son mouvement par rapport à (R_0) , sachant qu'à l'instant $t = 0$:

$$\alpha(t=0) = 0; \beta(t=0) = \beta_0; \dot{\alpha}(t=0) = 0; \dot{\beta}(t=0)$$

Solution détaillée

PARTIE A - CALCUL DES PUISSANCES

R1- Entre les solides (S_0) et (S_1) nous avons une liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) .

Donc par définition :

$$P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0) = [F(S_0 \rightarrow S_1)] \otimes [g(S_1 / R_0)] = \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_0 \rightarrow S_1) \\ \vec{M}_O(S_0 \rightarrow S_1) \end{Bmatrix}_O \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1 / R_0) \\ \vec{V}(O \in S_1 / R_0) \end{Bmatrix}_O$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(S_0 \rightarrow S_1) = X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ \vec{M}_O(S_0 \rightarrow S_1) = L_{01}\vec{x}_0 + M_{01}\vec{y}_0 \\ \vec{\Omega}(S_1 / R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(O \in S_1 / R_0) = \vec{0} \end{cases}$$

ce qui donne

$$P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0) = \begin{cases} X_{01}\vec{x}_0 + Y_{01}\vec{y}_0 + Z_{01}\vec{z}_0 \\ L_{01}\vec{x}_0 + M_{01}\vec{y}_0 \end{cases} \otimes \begin{cases} \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases} = 0$$

d'où :

$$P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0) = 0$$

R2 Entre les solides (S_1) et (S_2) nous avons une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0).

Donc par définition :

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = [F(S_1 \rightarrow S_2)] \otimes [g(S_2 / R_0)] = \begin{cases} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) \end{cases} \otimes \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R_0) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = X_{12}\vec{x}_1 + Y_{12}\vec{y}_1 + Z_{12}\vec{z}_1 \\ \vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) = L_{12}\vec{x}_1 + M_{12}\vec{y}_1 \\ \vec{\Omega}(S_2 / R_0) = \dot{\beta}\vec{z}_1 \\ \vec{V}(A \in S_1 / R_0) = \left[\frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{dL\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = L\vec{\Omega}(S_1 / R_0) \wedge \vec{x}_1 = L\dot{\alpha}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = L\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = \begin{cases} X_{12}\vec{x}_1 + Y_{12}\vec{y}_1 + Z_{12}\vec{z}_1 \\ L_{12}\vec{x}_1 + M_{12}\vec{y}_1 \end{cases} \otimes \begin{cases} \dot{\beta}\vec{z}_1 \\ L\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{cases} = 0 = L\dot{\alpha}Y_{12}$$

d'où :

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = L\dot{\alpha}Y_{12}$$

Remarque

Cette puissance n'est pas nulle bien que la liaison soit parfaite car cette liaison est mobile par rapport à (R_0).

R3- Entre les tiges (S_1) et (S_2) nous avons une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0).

Donc par définition :

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = [F(S_1 \rightarrow S_2)] \otimes [g(S_2 / R_1)] = \begin{cases} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) \end{cases} \otimes \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2 / R_1) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R_1) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = X_{12}\vec{x}_1 + Y_{12}\vec{y}_1 + Z_{12}\vec{z}_1 \\ \vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) = L_{12}\vec{x}_1 + M_{12}\vec{y}_1 \\ \vec{\Omega}(S_2 / R_1) = \vec{\Omega}(S_2 / R_0) + \vec{\Omega}(S_0 / S_1) = \vec{\Omega}(S_2 / R_0) - \vec{\Omega}(S_1 / S_0) = (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{z}_1 \\ \vec{V}(A \in S_1 / R_0) = \left[\frac{d\vec{OA}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{dL\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} = \vec{0} \end{cases}$$

ce qui donne

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_1) = \begin{cases} X_{12}\vec{x}_1 + Y_{12}\vec{y}_1 + Z_{12}\vec{z}_1 \\ L_{12}\vec{x}_1 + M_{12}\vec{y}_1 \end{cases} \otimes \begin{cases} (\dot{\beta} - \dot{\alpha})\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases} = 0 = 0$$

d'où :

$$\boxed{P(S_1 \rightarrow S_2 / R_1) = 0}$$

Remarque

Cette puissance est nulle, bien que la liaison soit parfaite. Ce qui change par rapport au cas précédent, c'est le repère d'observation. Cette liaison est fixe par rapport à (R_1).

R4- Par définition, on a :

$$P(\vec{g} \rightarrow S_1 / R_0) = [F(\vec{g} \rightarrow S_1)] \otimes [g(S_1 / R_0)] = \begin{cases} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow S_1) \\ \vec{M}_{G_1}(\vec{g} \rightarrow S_1) \end{cases} \otimes \begin{cases} \vec{\Omega}(S_1 / R_0) \\ \vec{V}(G_1 \in S_1 / R_0) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow S_1) = mg\vec{x}_0 \\ \vec{M}_{G_1}(\vec{g} \rightarrow S_1) = \vec{0} \\ \vec{\Omega}(S_1 / R_0) = \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G_1 \in S_1 / R_0) = \left[\frac{d\vec{OG}_1}{dt} \right]_{R_0} = \frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$P(\vec{g} \rightarrow S_1 / R_0) = \begin{cases} mg\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases} \otimes \begin{cases} \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{cases} = -mg\frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha$$

d'où :

$$\boxed{P(\vec{g} \rightarrow S_1 / R_0) = -mg\frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha}$$

Remarque

D'après la définition de l'énergie potentielle : $P(\vec{g} \rightarrow S_1 / R_0) = -\frac{dE_p(\vec{g} \rightarrow S_1 / R_0)}{dt}$

nous pouvons donc définir une énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p(\vec{g} \rightarrow S_1 / R_0) = -mg \frac{L}{2} \cos \alpha$$

R5- Par définition, on a :

$$P(\vec{g} \rightarrow S_2 / R_0) = [F(\vec{g} \rightarrow S_2)] \otimes [g(S_2 / R_0)] = \begin{cases} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_{G_1}(\vec{g} \rightarrow S_2) \end{cases}_{G_2} \otimes \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) \\ \vec{V}(G_2 \in S_2 / R_0) \end{cases}_{G_2}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow S_2) = mg\vec{x}_0 \\ \vec{M}_{G_1}(\vec{g} \rightarrow S_2) = \vec{0} \\ \vec{\Omega}(S_2 / R_0) = \dot{\beta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(G_2 \in S_2 / R_0) = \left[\frac{d\overline{OG_2}}{dt} \right]_{R_0} = L\dot{\alpha}\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$P(\vec{g} \rightarrow S_2 / R_0) = \begin{cases} mg\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_{G_2} \otimes \begin{cases} \dot{\beta}\vec{z}_0 \\ L\dot{\alpha}\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2 \end{cases}_{G_2} = -mg \frac{L}{2} (2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta)$$

d'où :

$$P(\vec{g} \rightarrow S_2 / R_0) = -mg \frac{L}{2} (2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta)$$

Remarque

D'après la définition de l'énergie potentielle : $P(\vec{g} \rightarrow S_2 / R_0) = -\frac{dE_p(\vec{g} \rightarrow S_2 / R_0)}{dt}$

nous pouvons donc définir une énergie potentielle de pesanteur :

$$E_p(\vec{g} \rightarrow S_2 / R_0) = -mg \frac{L}{2} (2 \cos \alpha + \cos \beta)$$

PARTIE B - CALCUL DES ENERGIES CINÉTIQUES

R6- L'énergie cinétique de la tige (S_1) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\begin{aligned} T(S_1 / R_0) &= \frac{1}{2} m \vec{V}^2(O / R_0) + \frac{1}{2} {}^T \vec{\Omega}(S_1 / R_0) M_O^{(S_1)} \vec{\Omega}(S_1 / R_0) \\ &= 0 + \frac{1}{2} (0, 0, \dot{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \frac{mL^2}{6} \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$T(S_1 / R_0) = \frac{mL^2}{6} \dot{\alpha}^2$$

R7- L'énergie cinétique de la tige (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\begin{aligned} T(S_2 / R_0) &= \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G_2 / R_0) + \frac{1}{2} {}^T \vec{\Omega}(S_2 / R_0) M_{G_2}^{(S_2)} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) \\ &= \frac{1}{2} m \left(L \dot{\alpha}_1 + \frac{L}{2} \dot{\beta} y_2 \right)^2 + \frac{1}{2} (0, 0, \dot{\beta}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m \left(L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{L^2}{4} \dot{\beta}^2 + L^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right) + \frac{mL^2}{24} \dot{\beta}^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$T(S_2 / R_0) = m \frac{L^2}{2} \left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right]$$

R8 L'énergie cinétique du double pendule (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$\begin{aligned} T(\Sigma / R_0) &= T(S_1 / R_0) + T(S_2 / R_0) \\ &= \frac{mL^2}{6} \dot{\alpha}^2 + m \frac{L^2}{2} \left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right] \\ &= \frac{mL^2}{6} [4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha)] \end{aligned}$$

d'où :

$$T(\Sigma / R_0) = \frac{mL^2}{6} [4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha)]$$

PARTIE C - APPLICATION DU THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

R9 Par définition le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la tige (S_2) s'écrit :

$$\frac{dT(S_2 / R_0)}{dt} = P(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)$$

- calcul de $P(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)$

si nous isolons (S_2), nous voyons qu'il n'est soumis qu'à deux actions extérieures :

- l'action de la pesanteur.
- l'action de liaison exercée par (S_1) sur (S_2).

nous avons donc : $P(\bar{S}_2 \rightarrow S_2) = P(\bar{g} \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0)$
avec

$$P(\bar{g} \rightarrow S_2 / R_0) = -mg \frac{L}{2} (2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta) \quad (\text{déjà calculée})$$

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = L\dot{\alpha}Y_{12} \quad (\text{déjà calculée})$$

d'où :

$$P(\bar{S}_2 \rightarrow S_2) = L\dot{\alpha}Y_{12} - mg \frac{L}{2} (2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta)$$

or

$$T(S_2 / R_0) = m \frac{L^2}{2} \left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right] \quad (\text{déjà calculée})$$

au final le T.E.C. appliqué au solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0) donne :

$$m \frac{L^2}{2} \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right] = L\dot{\alpha}Y_{12} - mg \frac{L}{2} (2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta)$$

Remarque

C'est une équation scalaire qui fait intervenir une inconnue de liaison. Ce n'est donc pas une équation du mouvement.

R10 Par définition le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système (Σ) s'écrit :

$$\frac{dT(\Sigma / R_0)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

- calcul de $P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$

si nous isolons (Σ), nous voyons qu'il n'est soumis qu'à deux actions extérieures :

- l'action de la pesanteur sur (S_1).
- l'action de la pesanteur sur (S_2).
- l'action de liaison exercée par (S_0) sur (S_1).

nous avons donc : $P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = P(\bar{g} \rightarrow S_1 / R_0) + P(\bar{g} \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0)$

avec :

$$P(\bar{g} \rightarrow S_1 / R_0) = -mg \frac{L}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (\text{déjà calculée})$$

$$P(\bar{g} \rightarrow S_2 / R_0) = -mg \frac{L}{2} (2\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta) \quad (\text{déjà calculée})$$

$$P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0) = 0 \quad (\text{déjà calculée})$$

donc :

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = -mg \frac{L}{2} (3\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta)$$

on peut remarquer que $P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = -\frac{d}{dt} \left[-mg \frac{L}{2} (3 \cos \alpha + \cos \beta) \right] = -\frac{dE_p}{dt}$

- Calcul de $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$

Il n'y a qu'une seule force mutuelle et c'est une liaison parfaite.

$$\text{donc } \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^n P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0$$

or

$$T(\Sigma / R_0) = \frac{mL^2}{6} [4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha)] \quad (\text{déjà calculée})$$

au final le T.E.C. appliqué au système (Σ) dans son mouvement par rapport à (R_0) donne :

$$\frac{mL^2}{6} \frac{d}{dt} [4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha)] = -mg \frac{L}{2} (3\dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\beta} \sin \beta)$$

en tenant compte de l'énergie potentielle, il vient :

$$\frac{mL^2}{6} \frac{d}{dt} [4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha)] = mg \frac{L}{2} \frac{d}{dt} (3 \cos \alpha + \cos \beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha)] = 3 \frac{g}{L} \frac{d}{dt} (3 \cos \alpha + \cos \beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - 3 \frac{g}{L} (3 \cos \alpha + \cos \beta) \right] = 0$$

d'où :

$$4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - 3 \frac{g}{L} (3 \cos \alpha + \cos \beta) = Cte$$

R11 - Intégrale première de l'énergie cinétique appliquée au système (Σ) .

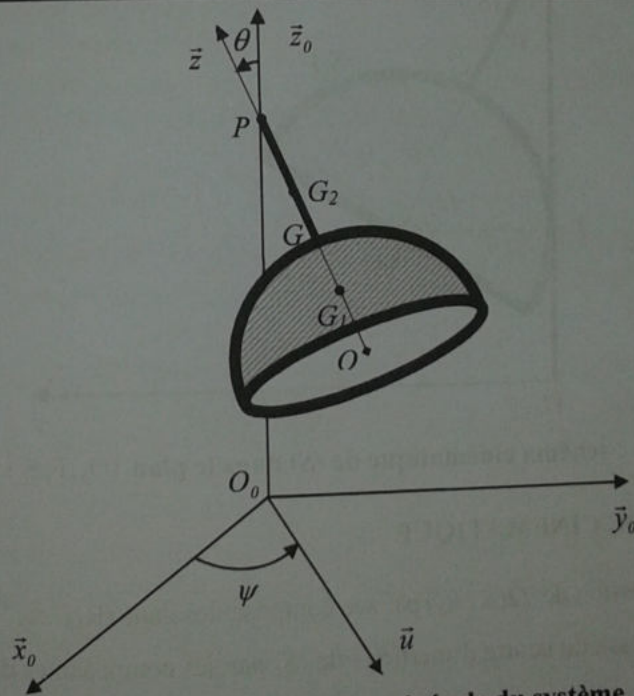
$$\text{A l'instant initial, nous avons : } -3 \frac{g}{L} (3 + \cos \beta_0) = Cte$$

par conséquent, l'intégrale première s'écrit :

$$4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - 3 \frac{g}{L} (3(\cos \alpha - 1) + \cos \beta - \cos \beta_0) = 0$$

Problème n° 4 : mouvement d'une demi-sphère soudée à une tige
Notions abordées

- ☞ Vitesse de glissement - Condition de roulement sans glissement
- ☞ Matrice d'inertie
- ☞ Moment cinétique - Moment dynamique
- ☞ Energie cinétique
- ☞ Torseur des actions extérieures
- ☞ Principe fondamental de la dynamique
- ☞ Actions de liaison
- ☞ Intégrales premières du mouvement
- ☞ Théorème de l'énergie cinétique


Figure 1 : description générale du système

Soit $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec (O_0, \vec{z}_0) vertical ascendant, supposé galiléen. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ le champ uniforme de la pesanteur ($g > 0$). Le solide étudié (S) est constitué par une demi-sphère creuse homogène (S_1) , de masse m , de centre O , de rayon a , de centre d'inertie G_1 tel que $\overline{OG_1} = \frac{a}{2}\vec{z}$ et par une tige (S_2) de masse m , de longueur a , de milieu G_2 , soudée par son extrémité G à (S_1) .

suivant (O, \bar{z}) de sorte que $\overline{OG_2} = \frac{3a}{2} \bar{z}$. L'autre extrémité P de (S_2) est fixée par une liaison sphérique parfaite sur l'axe (O_0, \bar{z}_0) de telle sorte que $\overline{O_0P} = h\bar{z}_0$, où h est une constante positive donnée (voir figure 1).

On note \vec{R}' la résultante des actions de cette liaison sur (S) .

On repère la position de (S) dans (R_0) à l'aide des angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ) .

On note $R_1(O, \bar{u}, \bar{v}, \bar{z}_0)$ et $R_2(O, \bar{u}, \bar{w}, \bar{z})$ les repères intermédiaires et $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ le repère lié à (S) .

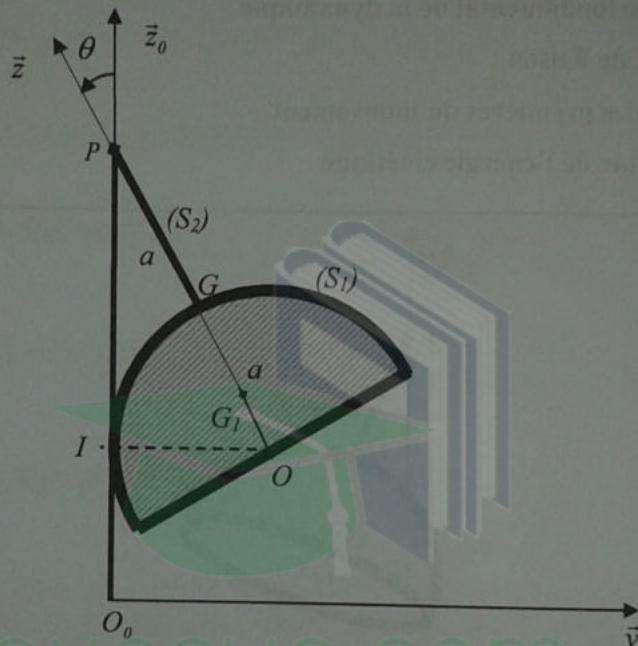


Figure 2 : schéma cinématique de (S) dans le plan $(O_0, \bar{v}, \bar{z}_0)$

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

- Q1-** Donner l'expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ par ses composantes dans (R_1) .
- Q2-** Calculer la vitesse du centre d'inertie G de (S) par ses composantes dans (R_2) et dans (R_1) .
- Q3-** Calculer l'accélération du centre d'inertie G de (S) par ses composantes dans (R_2) et dans (R_1) .
- Q4-** Dans l'hypothèse où la demi-sphère (S_1) reste tangente à l'axe (O_0, \bar{z}_0) (I point géométrique de contact), déterminer la condition géométrique de contact en I . En déduire les composantes dans (R_1) de la vitesse et de l'accélération de G .
- Q5-** Calculer la vitesse de glissement en I de (S) toujours dans l'hypothèse où (S_1) reste tangente à l'axe (O_0, \bar{z}_0) . En déduire alors la condition de roulement sans glissement en I de (S) sur l'axe (O_0, \bar{z}_0) .

Q6- Quel est l'axe instantané de rotation du mouvement de (S) par rapport à (R_0) .

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

Q7- Déterminer la matrice d'inertie de la demi-sphère en O dans (R_2) . En déduire la matrice d'inertie de (S_1) en son centre d'inertie G_1 dans le même repère.

Q8- Déterminer la matrice d'inertie de la demi-sphère en P dans (R_2) .

Q9- Déterminer la matrice d'inertie de la tige en P par ses composantes dans (R_2) .

Q10- Donner alors l'expression de la matrice d'inertie en P de (S) dans (R_2) .

PARTIE C - ETUDE CINÉTIQUE

Q11- Calculer le moment cinétique en P de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) par ses composantes dans (R_2) .

Q12- Calculer le moment dynamique en P de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) par ses composantes dans (R_2) .

Q13- Calculer l'énergie cinétique du solide (S) par rapport à (R_0) .

Q14- Que deviennent ces quantités dans le cas du non glissement en I et en tenant compte de la condition géométrique de contact ?

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

On suppose O_0P matérialisé par une tige rectiligne, de diamètre négligeable, avec laquelle (S_1) reste en contact en I (voir figure 2). On notera \vec{R}'' l'action en I de la tige sur (S) .

Dans les deux cas suivants :

a- cas de non frottement en I .

b- cas de non glissement en I avec frottement de coefficient f .

Q15- Donner l'expression du torseur des forces extérieures appliquées à (S) en P .

Q16- Ecrire les équations traduisant le principe fondamental de la dynamique.

Q17- En déduire les actions de liaison \vec{R}' et \vec{R}'' et deux intégrales premières du mouvement de (S) par rapport à (R_0) .

Q18- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, écrire une troisième intégrale première du mouvement.

N.B. : on suppose connues les conditions initiales du mouvement.

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1-

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\phi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} - \dot{\phi}\sin\theta\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\vec{z}_0$$

$$\text{R2- } \vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{OG}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(h\vec{z}_0 - a\vec{z})}{dt} \right]_{R_0} = -a \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_0}$$

$$\left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_2}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{z} = \begin{vmatrix} \dot{\theta} & 0 \\ \dot{\psi}\sin\theta \wedge & 0 \\ \dot{\psi}\cos\theta & 1 \end{vmatrix}_{R_2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2}$$

d'où :

$$\vec{V}(G/R_0) = \begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\sin\theta \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} = \begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\sin\theta \\ a\dot{\theta}\cos\theta \\ a\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix}_{R_1}$$

R3-

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

$$= \begin{vmatrix} -a(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} + \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \wedge \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_{R_2} \begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\sin\theta \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_2} = \begin{vmatrix} -a\ddot{\psi}\sin\theta - 2a\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ a\ddot{\theta} - a\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a\dot{\theta}^2 + a\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{vmatrix}_{R_2}$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{vmatrix} -a\ddot{\psi}\sin\theta - 2a\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ a\ddot{\theta} - a\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a\dot{\theta}^2 + a\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{vmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

$$= \begin{vmatrix} -a(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) \\ a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \wedge \\ \dot{\psi} \end{vmatrix}_{R_1} \begin{vmatrix} -a\dot{\psi}\sin\theta \\ a\dot{\theta}\cos\theta \\ a\dot{\theta}\sin\theta \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} -a\ddot{\psi}\sin\theta - 2a\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta - a\dot{\psi}^2\sin\theta \\ a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{vmatrix}_{R_1}$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} -a\ddot{\psi} \sin \theta - 2a\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta \\ a\ddot{\theta} \cos \theta - a\dot{\theta}^2 \sin \theta - a\dot{\psi}^2 \sin \theta \\ a(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array}$$

R4 Dans l'hypothèse où la demi-sphère (S_1) reste tangente à l'axe (O_0, \vec{z}_0) où I est le point géométrique de contact, on a :

$$OI = a = 2a \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

ce qui donne :

$$\vec{V}(G/R_0) = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} -a\frac{\dot{\psi}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array} \quad \vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} -a\frac{\ddot{\psi}}{2} \\ 0 - a\frac{\dot{\psi}^2}{2} \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array}$$

R5 La vitesse de glissement en I de (S_1) est donnée par :

$$\vec{V}_g(I, S/R_0) = \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(G \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{GI}$$

avec

$$\vec{V}(G/R_0) = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} -a\dot{\psi} \sin \theta \\ a\dot{\theta} \cos \theta \\ a\dot{\theta} \sin \theta \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array} = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} -a\frac{\dot{\psi}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array} \quad \text{Car } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array} = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{\dot{\phi}}{2} \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array} \quad \text{Car } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\vec{GI} = a\vec{z} - 2a \cos \theta \vec{z}_0 = a(\cos \theta \vec{z}_0 - \sin \theta \vec{v}) - 2a \cos \theta \vec{z}_0 = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} 0 \\ -a \sin \theta \\ -a \cos \theta \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array} = \begin{array}{c|l} & \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{array} \\ \hline R_1 & \end{array}$$

car $\theta = \frac{\pi}{6}$.

d'où :

$$\vec{V}_g(I, S / R_0) = \begin{vmatrix} -a\frac{\dot{\psi}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1} + \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\dot{\phi}}{2} \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}_{R_1} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \\ -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}_{R_1} = \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2}\dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{R_1}$$

soit :

$$\vec{V}_g(I, S / R_0) = \frac{a\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}\vec{u}$$

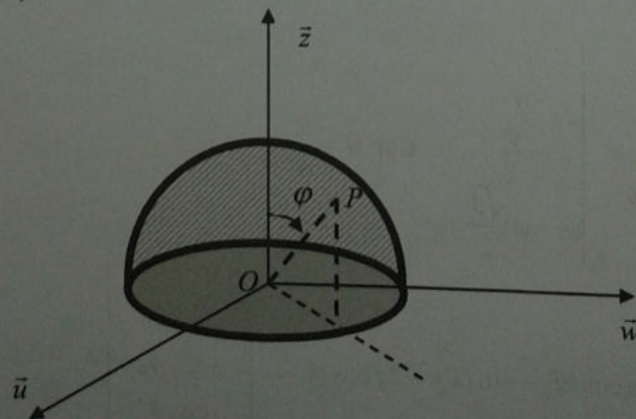
la condition de roulement sans glissement en I de (S) sur l'axe (O_0, \vec{z}_0) s'écrit :

$$\vec{V}_g(I, S / R_0) = \frac{a\sqrt{3}}{2}\dot{\phi}\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \phi = Cte$$

R6- L'axe instantané de rotation du mouvement de (S) par rapport à (R_0) est l'axe (O_0, \vec{z}_0) , en effet, on a deux points de vitesse nulle qui sont les points I (roulement sans glissement en I) et P_I (point fixe). Par conséquent le torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est un glisseur dont l'axe passe par ces deux points.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R7- Calculons la matrice d'inertie de la demi-sphère en O relativement à la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.



En utilisant les coordonnées sphériques :

$$\overline{OP} = \begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad dm = \sigma dS \text{ et } dS = a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ z = a \cos \varphi \end{cases}$$

où σ est la masse surfacique de (S_1) , la masse est donnée par : $m = 2\pi\sigma a^2$
soit :

$$D = \int_{P \in (S)} yz dm = \sigma a^4 \int_{P \in (S)} \sin \theta \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi d\theta = \sigma a^4 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right] \left[\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right] = 0$$

$$E = \int_{P \in (S)} xz dm = \sigma a^4 \int_{P \in (S)} \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos \theta d\varphi d\theta = \sigma a^4 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right] \left[\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right] = 0$$

$$F = \int_{P \in (S)} xy dm = \sigma a^4 \int_{P \in (S)} \sin^3 \varphi \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \sigma a^4 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi \right] \left[\int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \right] = 0$$

d'où : $D = E = F = 0$.

Pour calculer A , B et C , il est préférable de passer par $A' = \int_{P \in (S)} x^2 dm$ $B' = \int_{P \in (S)} y^2 dm$ et

$C' = \int_{P \in (S)} z^2 dm$ et d'en déduire A , B et C à partir des relations $A = B' + C'$, $B = A' + C'$ et

$C = A' + B'$. D'après la symétrie matérielle du système on a : $A = B$ et donc $A' = B'$.

Il reste à calculer A' et C' :

$$A' = \sigma a^4 \int_{P \in (S)} \sin^3 \varphi \cos^2 \theta d\varphi d\theta = \sigma a^4 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi \right] \left[\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right] = \frac{ma^2}{3}$$

$$C' = \sigma a^4 \int_{P \in (S)} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = \sigma a^4 \left[\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right] \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] = \frac{ma^2}{3}$$

soit :

$$A = B = C = \frac{2}{3} ma^2$$

d'où

$$: M_O^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} mRa & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} ma^2 \end{pmatrix}_{(u, v, z)}$$

D'après le théorème de Koenig on a :

$$\begin{cases} A = A_{G_1} + mz_{G_1}^2 \\ B = B_{G_1} + mz_{G_1}^2 \\ C = C_{G_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad z_{G_1} = \frac{a}{2}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} A_{G_1} = \frac{5}{12}ma^2 \\ B_{G_1} = \frac{5}{12}ma^2 \\ C_{G_1} = \frac{2}{3}ma^2 \end{cases}$$

et enfin :

$$M_{G_1}^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$$

R8 On applique de nouveau le théorème de Koenig entre les points P et G_1 :

$$\begin{cases} A_p = A_{G_1} + m\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = A_{G_1} + \frac{9}{4}ma^2 \\ B_p = B_{G_1} + m\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = B_{G_1} + \frac{9}{4}ma^2 \\ C_p = C_{G_1} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} A_p = \frac{8}{3}ma^2 \\ B_p = \frac{8}{3}ma^2 \\ C_p = \frac{2}{3}ma^2 \end{cases}$$

soit :

$$M_P^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})}$$

R9 Matrice d'inertie de la tige en P :

$$M_P^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})}$$

en effet :

$$A = I_{P_a} = \int_{P \in (S_2)} z^2 dm = \lambda \int_{-a}^0 z^2 dz = \frac{m}{a} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-a}^0 = \frac{ma^2}{3} = B.$$

R10 On a :

$$M_P^{(S)} = M_P^{(S_1)} + M_P^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})} + \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})}$$

d'où :

$$M_P^{(S)} = \begin{pmatrix} 3ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{z})}$$

PARTIE C - ETUDE CINÉTIQUE

On pose $A = 3ma^2$ et $C = \frac{2}{3}ma^2$

R11- Le moment cinétique en P de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est donné par :

$$\vec{\sigma}_P(S/R_0) = M_P^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A\dot{\theta} \\ A\dot{\psi} \sin \theta \\ C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{vmatrix}_{R_0}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_P(S/R_0) = A\dot{\theta}\vec{u} + A\dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)\vec{z} \quad (1)$$

R12- Le moment dynamique en P de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est donné par :

$$\vec{\delta}_P(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_P(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_P(S/R_0)}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_P(S/R_0)$$

$$= \begin{vmatrix} A\ddot{\theta} \\ A(\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ C(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A\dot{\theta} \\ A\dot{\psi} \sin \theta \\ C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\vec{\delta}_P(S/R_0) = \begin{vmatrix} A\ddot{\theta} + (C-A)\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C\dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \\ A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - C\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \\ C(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{vmatrix}_{R_0} \quad (2)$$

R13- L'énergie cinétique du solide (S) par rapport à (R_0) est donnée par :

$$E_C(S/R_0) = \frac{1}{2} \underbrace{(2m)\vec{V}^2(P/R_0)}_0 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) M_P^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\theta}, \dot{\psi} \sin \theta, \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

D'où :

$$E_C(S/R_0) = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \quad (3)$$

R14- Dans le cas de non glissement en I , on a : $\varphi = Cte$.

En tenant compte de la condition géométrique de contact en I , on a : $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Sous ces hypothèses, les expressions (1), (2) et (3) deviennent respectivement :

$$\bar{\sigma}_p(S/R_0) = \frac{A}{2} \dot{\psi} \bar{w} + C \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\psi} \bar{z}$$

$$\bar{\delta}_p(S/R_0) = \left. \begin{array}{l} (C-A) \frac{\sqrt{3}}{4} \dot{\psi}^2 \\ A \frac{\ddot{\psi}}{2} \\ C \frac{\sqrt{3}}{2} \ddot{\psi} \end{array} \right|_{R_2}$$

$$E_c(S/R_0) = \left(\frac{A+3C}{8} \right) \dot{\psi}^2$$

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

a- cas de contact en I sans frottement

R15- Le torseur des forces extérieures appliquées à (S) en P est :

$$[F_{ext}]_P = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \bar{R}' + R''\bar{v} - 2mg\bar{z}_0 \\ \bar{M}_P(F_{ext}) = \overline{PI} \wedge R''\bar{v} + \overline{PG} \wedge (-2mg\bar{z}_0) = a\sqrt{3}R''\bar{u} - mga\bar{u} \end{array} \right.$$

R16- Principe fondamental de la dynamique :

$$[F_{ext}]_P = [D(S/R_0)]_P$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}' + R''\bar{v} - 2mg\bar{z}_0 = 2m\bar{F}(G/R_0) \\ a\sqrt{3}R''\bar{u} - mga\bar{u} = \bar{\delta}_p(S/R_0) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \bar{R}' + R''\bar{v} - 2mg\bar{z}_0 = 2m\bar{F}(G/R_0) & (I) \\ (a\sqrt{3}R'' - mga)\bar{u} = \bar{\delta}_p(S/R_0) & (II) \end{array} \right.$$

les équations (I) et (II) traduisent les théorèmes généraux.

R17-

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{matrix} -a \frac{\ddot{\psi}}{2} \\ -a \frac{\dot{\psi}^2}{2} \\ 0 \end{matrix} \quad \text{Et } \vec{R}' = R'_u \vec{u} + R'_v \vec{v} + R'_{z_0} \vec{z}_0$$

dans ce cas l'équation vectorielle (I) conduit aux trois équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} R'_u = -ma\ddot{\psi} & (1') \\ R'_v + R'' = -ma\dot{\psi}^2 & (2') \\ R'_{z_0} - 2mg = 0 & (3') \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} R'_u = -ma\ddot{\psi} \\ R'_{z_0} = 2mg \end{cases}$$

par ailleurs le théorème du moment dynamique (II) conduit à l'équation scalaire :

$$a\sqrt{3}R'' - mga = (C - A)\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\psi}^2$$

d'où :

$$R'' = \frac{mga + (C - A)\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\psi}^2}{a\sqrt{3}}$$

ce qui donne :

$$R'_v = -R'' - ma\dot{\psi}^2 = -\frac{mga + (C - A)\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\psi}^2}{a\sqrt{3}} - ma\dot{\psi}^2$$

soit :

$$R'_v = \frac{mg}{\sqrt{3}} - \frac{(A - C - 4ma^2)\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\psi}^2}{4a}$$

Intégrales premières du mouvement

Pour trouver les deux intégrales premières du mouvement, il suffit de multiplier scalairement le théorème du moment dynamique (II) respectivement par \vec{z} et \vec{z}_0 . Ce qui donne :

$$\begin{cases} \vec{\delta}_p(S/R_0) \cdot \vec{z} = 0 \\ \vec{\delta}_p(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\delta}_p(S/R_0) \cdot \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d(\bar{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \bar{z})}{dt} \right]_{R_0} - \underbrace{\bar{\sigma}_p(S/R_0)}_0 \cdot \left[\frac{d\bar{z}}{dt} \right]_{R_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \bar{z} = Cte$$

d'où la première intégrale première du mouvement :

$$\boxed{\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = K_1 = Cte \quad (1)}$$

$$\bar{\delta}_p(S/R_0) \cdot \bar{z}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d(\bar{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \bar{z}_0)}{dt} \right]_{R_0} - \underbrace{\bar{\sigma}_p(S/R_0)}_0 \cdot \left[\frac{d\bar{z}_0}{dt} \right]_{R_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \bar{z}_0 = Cte$$

d'où la deuxième intégrale première du mouvement :

$$\boxed{A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = K_2 = Cte \quad (2)}$$

soit en tenant compte que $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$\boxed{\begin{cases} C(\dot{\psi} \frac{\sqrt{3}}{2} + \dot{\varphi}) = K_1 \\ A\frac{\dot{\psi}}{4} + CK_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = K_2 \end{cases}}$$

R18 Troisième intégrale première du mouvement

Pour obtenir une troisième intégrale première du mouvement, on va faire appel au théorème de l'énergie cinétique :

$$P(\bar{F}_{ext}) = [\mathcal{G}(S/R_0)]_{P_i} \otimes [F_{ext}]_{P_i}$$

$$= \underbrace{\bar{V}(P/R_0)}_0 \cdot \Sigma \bar{F}_{ext} + \bar{\Omega}(S/R_0) \cdot \bar{M}_{P_i}(\bar{F}_{ext}) = 0$$

$$\text{car } \bar{M}_{P_i}(\bar{F}_{ext}) = (a\sqrt{3}R^n - mga)\bar{u} \quad \text{et} \quad \bar{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi} \sin \theta \bar{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{z}$$

Le théorème de l'énergie s'écrit :

$$\frac{dE_C(S/R_0)}{dt} = P(\vec{F}_{ext}) = 0 \Leftrightarrow E_C(S/R_0) = Cte$$

d'où la troisième intégrale première du mouvement :

$$\boxed{\frac{A}{4}\dot{\psi}^2 + C\left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = K_3 = Cte \quad (3)}$$

b- non glissement en I avec frottement de coefficient f

R15- En I la réaction est cette fois-ci $\vec{R}'' = R_v''\vec{n} + R_t''\vec{i} = R_v''\vec{v} + R_{z_0}''\vec{z}_0$
avec $\|R_{z_0}''\| \leq f\|R_v''\|$.

Le non glissement en $I \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$.

par ailleurs, le torseur des forces extérieures s'écrit :

$$[F_{ext}]_p = \begin{cases} \vec{R}' + \vec{R}'' - 2mg\vec{z}_0 \\ (-\sqrt{3}aR_v'' - mga)\vec{u} \end{cases}$$

R16- Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$[F_{ext}]_p = [D(S/R_0)]_p$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' + R_v''\vec{v} - 2mg\vec{z}_0 = 2m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ (-\sqrt{3}aR_v'' - mga)\vec{u} = \vec{\delta}_p(S/R_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' + R_v''\vec{v} - 2mg\vec{z}_0 = -a\frac{\ddot{\psi}}{2} - a\dot{\psi}^2\vec{v} & (I') \\ (a\sqrt{3}R_v'' - mga)\vec{u} = \vec{\delta}_p(S/R_0) & (II') \end{cases}$$

R17- L'équation (I) conduit aux trois équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} R_u' = -ma\ddot{\psi} & (I') \\ R_v' + R_v'' = -ma\dot{\psi}^2 & (2') \\ R_{z_0}'' + R_{z_0}' - 2mg = 0 & (3') \end{cases}$$

$$\text{car } \vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{matrix} -a \frac{\ddot{\psi}}{2} \\ -a \frac{\dot{\psi}^2}{2} \\ 0 \end{matrix}_{R_0}$$

par ailleurs l'équation (II') conduit à :

$$\begin{cases} a\sqrt{3}R_v'' - mga = (C - A)\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\psi}^2 & (4') \\ 0 = A\frac{\ddot{\psi}}{2} & (5') \\ 0 = C\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{\psi} & (6') \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = 0 \Rightarrow \dot{\psi} = Cte \\ R_v'' = \frac{mg}{\sqrt{3}} + \frac{(C - A)}{4a}\dot{\psi}^2 \end{cases}$$

Intégrales premières du mouvement

Pour trouver les deux intégrales premières du mouvement, il suffit de multiplier scalairement le théorème du moment dynamique (II) respectivement par \vec{z} et \vec{z}_0 . Ce qui donne :

$$\begin{cases} \vec{\delta}_p(S/R_0) \cdot \vec{z} = 0 \\ \vec{\delta}_p(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\delta}_p(S/R_0) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d(\vec{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \vec{z})}{dt} \right]_{R_0} - \underbrace{\vec{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_0}}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \vec{z} = Cte$$

d'où la première intégrale première du mouvement :

$$\boxed{C\dot{\psi} \frac{\sqrt{3}}{2} = k'_1 \quad (1)'}$$

$$\vec{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d(\vec{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0} - \underbrace{\vec{\sigma}_p(S/R_0)}_0 \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{\sigma}_p(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = Cte$$

d'où la deuxième intégrale première du mouvement :

$$\boxed{A \frac{\dot{\psi}}{4} + k'_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = k'_2} \quad (2)'$$

R18- Troisième intégrale première du mouvement

Pour obtenir une troisième intégrale première du mouvement, on va faire appel au théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} P(\vec{F}_{ext}) &= [g(S/R_0)]_{P_i} \otimes [F_{ext}]_{P_i} \\ &= \underbrace{\vec{V}(P/R_0)}_0 \cdot \Sigma \vec{F}_{ext} + \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{M}_{P_i}(\vec{F}_{ext}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{car } \vec{M}_{P_i}(\vec{F}_{ext}) = (a\sqrt{3}R'' - mga)\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}(S/R_0) = \frac{\dot{\psi}}{2}\vec{w} + \dot{\psi} \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{z}$$

le théorème de l'énergie s'écrit :

$$\frac{dE_C(S/R_0)}{dt} = P(\vec{F}_{ext}) = 0 \Leftrightarrow E_C(S/R_0) = Cte$$

d'où la troisième intégrale première du mouvement :

$$\boxed{\left(\frac{A+3C}{8} \right) \dot{\psi}^2 = K'_3} \quad (3)'$$

Problème n° 5 : sphère à l'intérieur d'un profil circulaire en translation

Notions abordées

- ☞ Nombre de degrés de liberté - Paramètres de position
- ☞ Vitesse de glissement - Condition de roulement sans glissement
- ☞ Centre d'inertie
- ☞ Matrice centrale d'inertie
- ☞ Torseur cinétique - Energie cinétique
- ☞ Théorème de la résultante dynamique
- ☞ Théorème de l'énergie cinétique
- ☞ Intégrale première

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec (O, \vec{z}_0) vertical ascendant, supposé galiléen. Une sphère pleine homogène (S) de masse m et de rayon a roule sans glisser à l'intérieur d'un guide semi-circulaire de rayon $R > 2a$ creusé dans un bloc (B) de masse M .

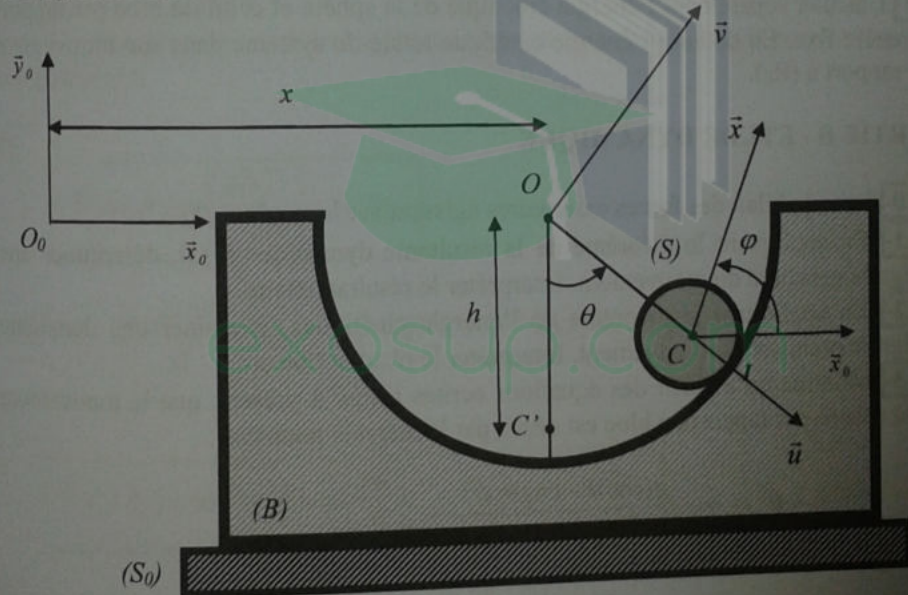


Figure : description générale du système

Le bloc glisse sans frottement sur une surface horizontale fixe (S_0) . Le centre d'inertie C' du bloc se trouve à la verticale du centre O du profil, à une distance h de celui-ci : $\overline{OC'} = -h\vec{y}_0$. Le système (Σ) est initialement au repos alors que le centre d'inertie C de la sphère fait un angle $\theta = \theta_0$ avec la verticale inférieure (voir figure). Le mouvement est plan.

Le repère orthonormé direct $R(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la sphère et le repère orthonormé

direct $R_I(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ est un repère intermédiaire servant à repérer la position du centre d'inertie C de la sphère et n'est affecté à aucun solide.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE ET CINETIQUE

- Q1-** Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?
- Q2-** Montrer que le mouvement du système peut être représenté par trois paramètres non indépendants. Préciser lesquels.
- Q3-** Exprimer les vitesses du point O et du point C en fonction des paramètres de position du système.
- Q4-** Calculer la vitesse de glissement de (S) par rapport à (B) en I . En déduire la condition de roulement sans glissement.
- Q5-** Déterminer la position du centre d'inertie G du système.
- Q6-** Calculer $\vec{V}(G/R_0)$ vitesse du centre d'inertie G du système.
- Q7-** Déterminer la matrice centrale d'inertie de la sphère dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Q8-** Exprimer séparément le torseur cinétique en O_0 de la sphère et celui du bloc par rapport au repère fixe.
- Q9-** Calculer séparément l'énergie cinétique de la sphère et celui du bloc par rapport au repère fixe. En déduire l'énergie cinétique totale du système dans son mouvement par rapport à (R_0) .

PARTIE B - ETUDE DYNAMIQUE

- Q10-** Faire le bilan des forces extérieures agissant sur le système (S) .
- Q11-** En appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S) , déterminer une intégrale première du mouvement. Interpréter le résultat obtenu.
- Q12-** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer une deuxième intégrale première du mouvement. Interpréter le résultat obtenu.
- Q13-** Montrez qu'à partir des équations écrites jusqu'à présent, que le mouvement de la sphère par rapport au bloc est décrit par l'intégrale première :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{\frac{R-a}{2} \left(\frac{7}{5} - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta \right)}$$

- Q14-** A partir de l'intégrale première du mouvement, obtenue à la question-11, déterminez qualitativement le mouvement de la sphère par rapport au bloc.
- Q15-** Déterminez de quelle distance maximale le bloc va s'éloigner de sa position initiale.

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE ET CINETIQUE

R1- Le système possède deux degrés de liberté, en effet :

- le bloc, en mouvement plan et astreint à se déplacer sur une surface horizontale sans rotation, possède un seul degré de liberté associé à la translation.
- la sphère, en mouvement plan, a au maximum trois degrés de liberté. Elle est soumise à deux liaisons : elle est astreinte à se déplacer sur le bloc et doit satisfaire à la condition de roulement sans glissement. La sphère a donc un seul degré de liberté.

R2- Nous pouvons introduire, pour décrire le mouvement du bloc (B), une variable x mesurant le déplacement horizontal du point O par rapport au point O_0 où il se trouvait à l'instant initial.

Pour décrire le mouvement du centre d'inertie de la sphère par rapport au bloc, nous choisissons l'angle θ que fait la droite joignant le point O et le centre d'inertie de la sphère avec la verticale inférieure.

Pour décrire le mouvement de la sphère autour de son centre d'inertie, nous introduirons l'angle φ qui mesure la rotation propre de la sphère autour de son centre C par rapport à la direction horizontale.

Ces trois paramètres ne sont pas indépendants mais liés par la condition de roulement sans glissement.

R3-

$$\vec{V}(O/R_0) = \left[\frac{d\overline{O_0O}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0$$

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{d\overline{O_0C}}{dt} \right]_{R_0} \quad \text{Avec } \overline{O_0C} = \overline{O_0O} + \overline{OC} = x\vec{x}_0 + (R-a)\vec{u}$$

\Leftrightarrow

$$\vec{V}(C/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + (R-a) \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + (R-a)\dot{\theta}\vec{v}$$

R4- La vitesse de glissement de (S) sur (B) en I est :

$$\vec{V}_s(I, S/R_0) = \vec{V}(I \in S/R_0) - \vec{V}(I \in B/R_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in S/R_0) &= \vec{V}(C \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{CI} = \dot{x}\vec{x}_0 + (R-a)\dot{\theta}\vec{v} + \dot{\varphi}\vec{z}_0 \wedge a\vec{u} \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 + ((R-a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi})\vec{v} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{V}_s(I, S/R_0) = ((R-a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi})\vec{v}$$

La condition de roulement sans glissement est : $\vec{V}_g(I, S / R_0) = \vec{0}$

d'où :

$$(R - a)\dot{\theta} + a\dot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

R5-

$$\overrightarrow{O_0 G} = \frac{m\overrightarrow{O_0 C} + M\overrightarrow{O_0 C'}}{m + M} = \frac{m(x\bar{x}_0 + (R - a)\vec{u}) + M(x\bar{x}_0 - h\bar{y}_0)}{m + M}$$

d'où :

$$\overrightarrow{O_0 G} = x\bar{x}_0 + \frac{m(R - a)\vec{u} - Mh\bar{y}_0}{m + M}$$

R6-

$$\vec{V}(G / R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0 G}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{x}\bar{x}_0 + \frac{m}{m + M}(R - a) \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{x}\bar{x}_0 + \frac{m}{m + M}(R - a)\dot{\theta}\vec{v}$$

or $\vec{v} = \cos\theta\bar{x}_0 + \sin\theta\bar{y}_0$

d'où :

$$\vec{V}(G / R_0) = \left[\dot{x} + \frac{m}{m + M}(R - a)\dot{\theta}\cos\theta \right] \bar{x}_0 + \frac{m}{m + M}(R - a)\dot{\theta}\sin\theta\bar{y}_0$$

R7- Compte tenu que la sphère admet la triple symétrie : trois plans de symétrie matérielle qui sont (C, \bar{x}, \bar{y}) , (C, \bar{x}, \bar{z}) et (C, \bar{y}, \bar{z}) la matrice d'inertie s'écrit :

$$M_C^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

il convient d'utiliser les coordonnées sphériques (θ longitude et φ co-latitude) :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \sin\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

$$A = B = C = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi = \frac{8}{5} \rho \pi a^5 = \frac{2}{5} ma^2$$

d'où :

$$M_C^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} ma^2 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

R8- Torseur cinétique en O_0 de la sphère :

$$[C(S/R_0)] = \begin{cases} m\vec{V}(C/R_0) \\ \vec{\sigma}_{O_0}(S/R_0) \end{cases}$$

avec : $\vec{\sigma}_{O_0}(S/R_0) = \vec{\sigma}_C(S/R_0) + m\vec{V}(C/R_0) \wedge \overline{CO_0}$

$$\vec{\sigma}_C(S/R_0) = M_C^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}ma^2 \dot{\phi} \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned} m\vec{V}(C/R_0) \wedge \overline{CO_0} &= (m\dot{x}\vec{x}_0 + m(R-a)\dot{\theta}\vec{v}) \wedge (-(R-a)\vec{u} - x\vec{x}_0) \\ &= [m\dot{x}(R-a)\cos\theta + m(R-a)^2\dot{\theta} + m(R-a)x\dot{\theta}\sin\theta] \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_{O_0}(S/R_0) = \left[\frac{2}{5}ma^2\dot{\phi} + m\dot{x}(R-a)\cos\theta + m(R-a)^2\dot{\theta} + m(R-a)x\dot{\theta}\sin\theta \right] \vec{z}_0$$

Torseur cinétique en O_0 du bloc :

$$[C(B/R_0)] = \begin{cases} M\vec{V}(G/R_0) = M\dot{x}\vec{x}_0 \\ \vec{\sigma}_{O_0}(B/R_0) \end{cases}$$

avec : $\vec{\sigma}_{O_0}(B/R_0) = \underbrace{\vec{\sigma}_G(B/R_0)}_{\vec{0}} + M\vec{V}(G/R_0) \wedge \overline{GO_0} = M\dot{x}\vec{x}_0 \wedge h\vec{y}_0 = Mh\dot{x}\vec{z}_0$

d'où : $\vec{\sigma}_{O_0}(B/R_0) = Mh\dot{x}\vec{z}_0$

R9- Energie cinétique de la sphère :

$$E_C(S/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(C/R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) M_C^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

d'où :

$$E_C(S/R_0) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (R-a)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}(R-a)\cos\theta) + \frac{ma^2}{5}\dot{\phi}^2$$

Energie cinétique du bloc :

$$E_C(B/R_0) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

d'où :

$$E_C(\Sigma / R_0) = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + (R-a)^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}(R-a)\cos\theta) + \frac{ma^2}{5} \dot{\phi}^2$$

soit :

$$E_C(\Sigma / R_0) = \frac{1}{2} (m+M) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m ((R-a)^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}(R-a)\cos\theta) + \frac{ma^2}{5} \dot{\phi}^2$$

PARTIE B - ETUDE DYNAMIQUE

R10- Bilan des forces extérieures appliquées à (S) :

- poids de la sphère : $-mg\vec{y}_0$ appliqué au centre C de la sphère ;
- poids du bloc : $-Mg\vec{y}_0$ appliqué au centre C' du bloc ;
- $\vec{f}(M)$: une distribution surfacique des forces de liaison agissant sur la base du bloc en contact avec la surface horizontale. Cette distribution est inconnue mais de résultante $\vec{R} = R\vec{y}_0$ verticale vu l'absence de frottement.

R11- Théorème de la résultante dynamique appliqué à (S) :

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F}_{ext} &= m\vec{\Gamma}(G / R_0) \\ \Leftrightarrow -(m+M)g\vec{y}_0 + R\vec{y}_0 &= m\vec{\Gamma}(G / R_0) \\ \Leftrightarrow (R - (m+M)g)\vec{y}_0 &= m\vec{\Gamma}(G / R_0) \end{aligned}$$

puisque toutes les forces sont verticales, on a :

$$m\vec{\Gamma}(G / R_0) \cdot \vec{x}_0 = 0 \Leftrightarrow \vec{V}(G / R_0) \cdot \vec{x}_0 = Cte$$

d'où :

$$\dot{x} + \frac{m}{m+M} (R-a)\dot{\theta}\cos\theta = Cte$$

la constante peut être déterminée en tenant compte de ce que, à l'instant initial, le système est au repos ($\dot{x} = 0, \dot{\theta} = 0$). On obtient alors :

$$\dot{x} + \frac{m}{m+M} (R-a)\dot{\theta}\cos\theta = 0 \quad (2)$$

(première intégrale première du mouvement)

cette intégrale représente l'intégrale première de conservation de la quantité de mouvement horizontale du système.

R12- Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système total en $O's'$ écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c(\Sigma / R_0)}{dt} &= P(\vec{F}_{ext}) = -(m+M)g\vec{y}_0 \cdot \vec{V}(G / R_0) = -mg(R-a)\dot{\theta} \sin \theta \\ &= -\frac{d}{dt}[-mg(R-a)\cos \theta] = -\frac{dE_p(\Sigma)}{dt} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E_c(\Sigma / R_0) + E_p(\Sigma) = E = Cte$$

$$\text{avec } E_p(\Sigma) = -mg(R-a)\cos \theta$$

d'où :

$$\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m((R-a)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}(R-a)\cos \theta) + \frac{ma^2}{5}\dot{\varphi}^2 - mg(R-a)\cos \theta = E = Cte$$

la constante peut être déterminée en tenant compte de ce que, à l'instant initial, le système est au repos ($\dot{x} = 0, \dot{\theta} = 0$) dans la position $x = 0, \theta = \theta_0$, ce qui donne

$E = -mg(R-a)\cos \theta_0$ et finalement :

$$\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m((R-a)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}(R-a)\cos \theta) + \frac{ma^2}{5}\dot{\varphi}^2 - mg(R-a)\cos \theta = -mg(R-a)\cos \theta_0$$

(3) (deuxième intégrale première du mouvement)

cette intégrale représente l'intégrale première de l'énergie cinétique.

R13- Pour obtenir l'équation décrivant le mouvement de la sphère par rapport au bloc, éliminons les paramètres x et φ de l'équation (3) au moyen des équations (2) et (1). On obtient :

$$\dot{x} = -\frac{m}{m+M}(R-a)\dot{\theta}\cos \theta$$

et

$$\dot{\varphi} = -\frac{R-a}{a}\dot{\theta}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{m+M}{2} \frac{m^2}{(m+M)^2} (R-a)^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \frac{ma^2}{5} \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\theta}^2 \\ + \frac{m}{2} \left[(R-a)^2 \dot{\theta}^2 - 2 \frac{m}{m+M} (R-a)^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \right] - mg(R-a)\cos \theta = -mg(R-a)\cos \theta_0 \end{aligned}$$

soit après simplification :

$$\dot{\theta}^2 \left[\frac{R-a}{2} \left(\frac{7}{5} - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta \right) \right] - g \cos \theta = -g \cos \theta_0 \quad (4)$$

(intégrale première du mouvement)

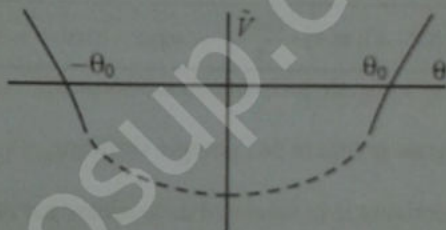
R14 Le mouvement peut être discuté à partir de l'intégrale première (4). En écrivant celle-ci sous la forme :

$$\dot{\theta}^2 - \frac{g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{\frac{R-a}{a} \left(\frac{7}{5} - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta \right)} = 0$$

on constate que le potentiel

$$\tilde{V}(\theta) = - \frac{g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{\frac{R-a}{a} \left(\frac{7}{5} - \frac{m}{m+M} \cos^2 \theta \right)}$$

dont le dénominateur est toujours strictement positif, ne s'annule que pour $\theta = \theta_0$ et est strictement négatif entre ces deux valeurs de θ . Puisque la constante du second membre est nulle, il y correspond un mouvement dans un puits de potentiel limité par deux points de réflexion. Le comportement réel du potentiel entre les deux points de réflexion importe peu.



On en conclut que la sphère oscille sur le bloc entre les angles θ_0 et $-\theta_0$.

R15 Intégrons par rapport au temps l'équation (2) afin d'obtenir une relation entre la variable x qui nous intéresse pour répondre à cette question et la variable θ dont nous venons d'étudier l'évolution. On obtient :

$$(m+M)x = -m(R-a)\sin\theta + Cte$$

où la constante peut être déterminée en tenant compte des conditions initiales $x = 0$ et $\theta = \theta_0$.

On a :

$$Cte = m(R-a)\sin\theta$$

l'angle θ variant entre $-\theta_0$ et θ_0 , la distance x_{\max} est obtenue pour $\theta = \theta_0$. Elle vaut :

$$x_{\max} = 2 \frac{m}{m+M} (R-a) \sin \theta_0$$

Problème n° 6 : cerceau d'enfant

Notions abordées

- ☞ Torseur des actions de liaison
- ☞ Inconnues de liaison
- ☞ Principe fondamental de la dynamique
- ☞ Moment d'inertie
- ☞ Moment cinétique
- ☞ Moment dynamique
- ☞ Energie cinétique
- ☞ Puissance des efforts extérieurs
- ☞ Théorème de l'énergie cinétique

Soit le système (Σ) constitué d'une tige (S_1) d'extrémités A et C et d'un cerceau (S_2) , comme le montre la figure 1. Le bâti est désigné par (S_0) . L'ensemble est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g\vec{y}_0$.

La tige (S_1) est de longueur $2l$, homogène de masse M et a pour centre d'inertie G , milieu de AC . Son extrémité A est astreinte à se déplacer sans frottement sur l'axe (O, \vec{y}_0) .

Le cerceau (S_2) est homogène de masse m , a pour rayon r et pour centre d'inertie C , et est lié à la tige (S_1) par une liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0) .

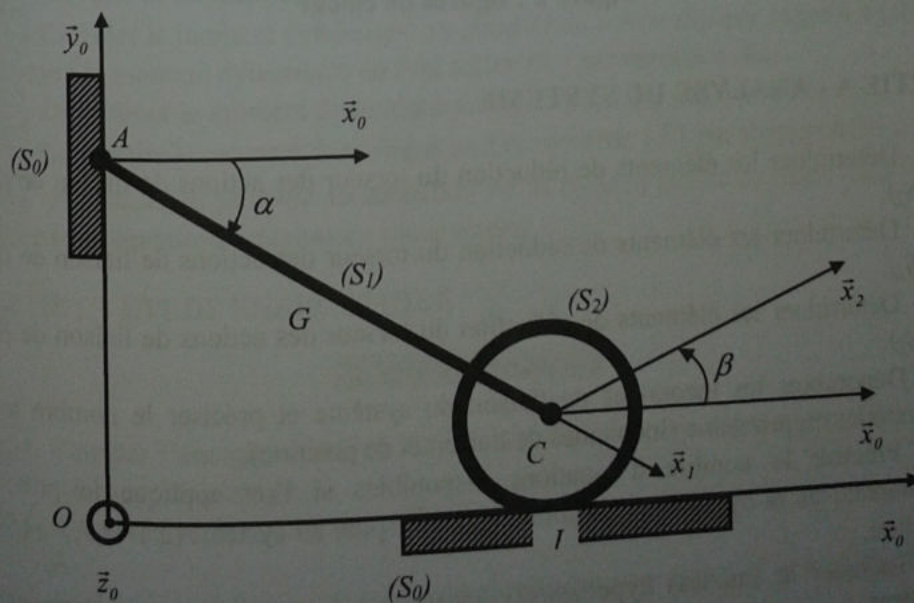


Figure 1 : description générale du système

La liaison entre le cerceau et le bâti (S_0) peut être modélisée par une liaison ponctuelle en I .

Le coefficient de frottement entre les deux matériaux constituant le cerceau et le bâti est noté f .

Les repères choisis, liés aux divers constituants du système sont les suivants :

- le repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (S_0), et supposé galiléen.
- le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié à la tige (S_1) tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$, cet angle étant négatif dans la position de la figure 1.
- le repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ lié au cerceau (S_2) tel que $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$, paramètre angulaire repérant la position du cerceau autour de son axe (C, \vec{z}_0).

Le mouvement d'ensemble du système (Σ) est alors décrit par la variation de deux paramètres angulaires : l'angle orienté $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et l'angle orienté $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$. Au cours du mouvement, ces deux paramètres varient en fonction du temps. A l'instant initial $t = 0$, le système est supposé au repos : $\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0$.

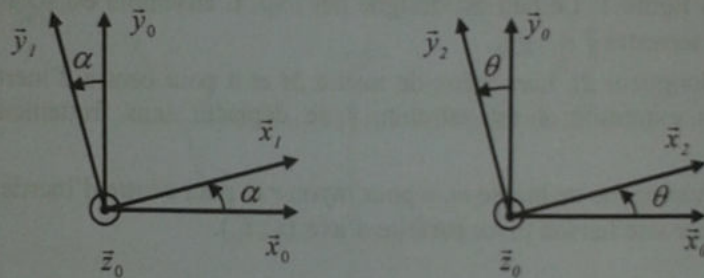


Figure 2 : figures de calcul

PARTIE A - ANALYSE DU SYSTEME

Q1- Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions de liaison de (S_1) sur (S_2).

Q2- Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions de liaison de (S_0) sur (S_1).

Q3- Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions de liaison de (S_0) sur (S_2).

Q4- Dénombrer les inconnues de liaison du système et préciser le nombre total d'inconnues du problème (inconnues de liaison et de position).

Q5- Préciser le nombre d'équations disponibles si l'on applique le principe fondamental de la dynamique au solide (S_2) seul puis au système (Σ) = (S_1) \cup (S_2). Conclure.

Q6- Indiquer la (ou les) hypothèse(s) nécessaire(s) pour poser complètement le problème.

PARTIE B - ETUDE DYNAMIQUE

Etude du cerceau (S_2)

- Q7- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le cerceau (S_2).
- Q8- Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2 / R_0)$.
- Q9- Calculer la vitesse du point C par rapport au repère (R_0).
- Q10- Calculer l'accélération du point C par rapport au repère (R_0).
- Q11- Déterminer le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe (C, \vec{z}_0).
- Q12- Calculer le moment cinétique au point C du cerceau (S_2) par rapport à (R_0).
- Q13- Calculer le moment dynamique au point C du cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0).
- Q14- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au cerceau (S_2) et en déduire trois équations scalaires du mouvement.

Etude du système (Σ) = (S_1) \cup (S_2)

- Q15- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système.
- Q16- Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_1 / R_0)$.
- Q17- Calculer la vitesse du point G par rapport au repère (R_0).
- Q18- Calculer l'accélération du point G par rapport au repère (R_0). En déduire la résultante dynamique du système (Σ) par rapport au repère (R_0).
- Q19- Déterminer le moment d'inertie de la tige (S_1) par rapport à l'axe (G, \vec{z}_0).
- Q20- Calculer le moment cinétique au point G du solide (S_1) par rapport à (R_0).
- Q21- Calculer le moment dynamique au point G du solide (S_1) par rapport à (R_0), et en déduire le moment dynamique en I du solide (S_1) par rapport à (R_0).
- Q22- Déterminer le moment dynamique en I du solide (S_2) par rapport à (R_0).
- Q23- En déduire le moment dynamique en I du système (Σ) par rapport à (R_0).
- Q24- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système (Σ) et en déduire trois équations scalaires du mouvement.

PARTIE C - ETUDE ENERGETIQUE

Etude du cerceau (S_2)

- Q25- Calculer l'énergie cinétique du cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0) et sa dérivée par rapport au temps.
- Q26- Calculer la puissance des efforts extérieurs au cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0).
- Q27- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au cerceau (S_2) et en déduire une équation scalaire.

Etude du système $(\mathcal{S}) = (S_1) \cup (S_2)$

Q28- Calculer l'énergie cinétique du système (\mathcal{S}) par rapport au repère (R_0) et sa dérivée par rapport au temps.

Q29- Calculer la puissance des efforts extérieurs et intérieurs au système (\mathcal{S}) par rapport au repère (R_0) .

Q30- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système (\mathcal{S}) et en déduire une équation scalaire.

Solution détaillée**PARTIE A - ANALYSE DU SYSTEME****Inconnues du problème**

R1- Action de la tige (S_1) sur le cerceau (S_2) (liaison pivot parfaite d'axe (C, \vec{z}_0)) :

$$[A(S_1 \rightarrow S_2)]_C = \begin{cases} \vec{R}_C \\ \vec{M}_C \end{cases} = \begin{cases} X_C & L_C \\ Y_C & M_C \\ Z_C & 0 \end{cases}_{R_0}$$

cependant, le système étant un système plan, les composantes Z_C , L_C et M_C sont inopérantes, et par suite peuvent être considérées comme nulles dans la suite du calcul, ce qui permet d'écrire que le torseur des actions de la tige (S_1) sur le cerceau (S_2) est un glisseur dont l'axe passe par le centre C de la liaison pivot :

$$[A(S_1 \rightarrow S_2)] = (C, \vec{R}_C) = \begin{cases} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{cases}_{R_0}$$

R2- Action du bâti (S_0) sur la tige (S_1) (liaison ponctuelle au point A sans frottement) :

$$[A(S_0 \rightarrow S_1)] = (A, \vec{F}_A) = \begin{cases} F_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{R_0}$$

avec $F_A > 0$ pour que le contact soit maintenu.

R3- Action du bâti (S_0) sur le cerceau (S_2) (liaison ponctuelle au point I avec frottement) :

$$[A(S_0 \rightarrow S_2)] = (I, \vec{R}_I) = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} T_I & 0 \\ N_I & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \\ I \quad R_0 \end{matrix}$$

avec $N_I > 0$ pour que le contact soit maintenu.

Il convient de noter que, sans hypothèse supplémentaire sur le glissement ou non du cerceau (S_2) par rapport au bâti (S_0), le signe de la composante tangentielle T_I (force de frottement) n'est pas déterminé. De même, $|T_I| = fN_I$ dans le cas du glissement et $|T_I| \leq fN_I$ dans le cas du non glissement, où f est le coefficient de frottement.

R4- Nombre des inconnues de liaison et de position du problème

Le système comporte cinq inconnues de liaison (X_C, Y_C, F_A, T_I, N_I), et deux inconnues de position (α, β), soit en tout sept inconnues.

Equations disponibles

R5- Le problème étant plan, l'application du PFD au système permet d'obtenir trois équations scalaires (deux, pour les résultantes et une pour les moments en un point). Par suite, l'application du PFD au cerceau (S_2) puis au système (\mathcal{S}) permet d'obtenir six équations. Le nombre d'inconnues étant égal à sept, il manque une équation pour que le problème ait une solution.

R6- La septième équation manquante ne peut être obtenue que sous réserve d'une hypothèse supplémentaire :

- soit l'hypothèse de non glissement au point I , ce qui permet d'écrire une condition de roulement sans glissement qui fournit une équation supplémentaire.
- soit l'hypothèse de glissement au point I , ce qui permet d'écrire la deuxième loi de Coulomb $|T_I| = fN_I$ qui fournit l'équation manquante.

Il convient de noter à ce stade que l'application du PFD permet d'obtenir alors toutes les inconnues du problème, mais qu'il n'est pas possible d'obtenir les équations du mouvement sans également déterminer les actions de liaison.

PARTIE B - ETUDE DYNAMIQUE

Etude du cerceau (S_2)

R7- Bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur le cerceau (S_2) :

- action de la pesanteur : $[g \rightarrow S_2] = (C, \vec{P}_2)$ avec $\vec{P}_2 = -mg\vec{v}_0$.
- action du bâti (S_0) sur le cerceau (S_2) (liaison pivot) :

$$[A(S_0 \rightarrow S_2)] = (I, \vec{R}_I) = \begin{Bmatrix} T_I & 0 \\ N_I & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

avec $N_I > 0$ pour que le contact soit maintenu.

– action de la tige (S_1) sur le cerceau (S_2) (liaison pivot parfaite) :

$$[A(S_1 \rightarrow S_2)] = (C, \vec{R}_C) = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

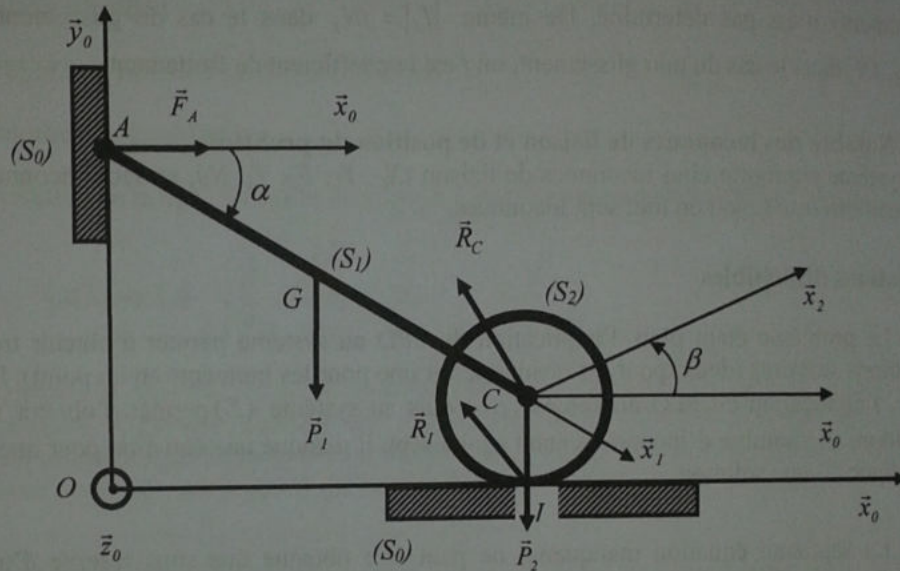


Figure 3 : bilan des actions mécaniques de pesanteur et de liaison

Par suite, le torseur des actions extérieures exercées sur le cerceau (S_2) est donné par :

$$[\vec{S}_2 \rightarrow S_2] = [g \rightarrow S_2] + [A(S_0 \rightarrow S_2)] + [A(S_1 \rightarrow S_2)]$$

R8- Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R_2 / R_0)$ associé au mouvement de (R_2) par rapport à (R_0) est :

$$\vec{\Omega}(R_2 / R_0) = \dot{\beta} \vec{z}_0$$

R9- Vitesse du point C par rapport au repère (R_0) :

on a :

$$\vec{OC} = \vec{OK} + \vec{KC} = 2l \cos \alpha \vec{x}_0 + r \vec{y}_0$$

ce qui donne :

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{d\vec{OC}}{dt} \right]_{R_0} = -2l\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{x}_0$$

R10- Accélération du point C par rapport au repère (R_0) :

$$\vec{\Gamma}(C/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(C/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = -2l(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \vec{x}_0$$

R11- Moment d'inertie du cerceau (S_2) par rapport à l'axe (C, \vec{z}_0) :

$$I_{Cz_0}(S_2) = \int_{P \in (S_2)} (x^2 + y^2) dm = \lambda \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \underbrace{rd\theta}_{dl} = mr^2 \text{ car } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ et } \lambda = \frac{m}{2\pi}$$

donc

$$I_{Cz_0}(S_2) = mr^2$$

R12- Le moment cinétique au point C du cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0) est :

$$\vec{\sigma}_C(S_2/R_0) = M_C^{(S_2)} \vec{\Omega}(S_2/R_0) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_C(S_2/R_0) = C_2 \dot{\beta} \vec{z}_0 = mr^2 \dot{\beta} \vec{z}_0$$

R13- Le moment dynamique au point C du cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0) est :

$$\vec{\delta}_C(S_2/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_C(S_2/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

d'où :

$$\vec{\delta}_C(S_2/R_0) = C_2 \ddot{\beta} \vec{z}_0 = mr^2 \ddot{\beta} \vec{z}_0$$

R14- Application du principe fondamental de la dynamique :

- **théorème de la résultante dynamique :**

la résultante de tous les efforts extérieurs exercés sur le cerceau (S_2) , notée $\vec{R}(ext \rightarrow S_2)$ est égale à la quantité d'accélération de (S_2) :

$$\vec{R}(ext \rightarrow S_2) = m\vec{\Gamma}(C/R_0) \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_C = m\vec{\Gamma}(C/R_0)$$

ce qui conduit aux deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} T_I + X_C = -2ml(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) & (1) \\ N_I + Y_C = mg & (2) \end{cases}$$

– **théorème du moment dynamique au point C :**

Le moment au point C de tous les efforts extérieurs exercés sur le cerceau (S_2), noté $\vec{M}_C(\text{ext} \rightarrow S_2)$ est égal au moment dynamique au point C du cerceau (S_2) par rapport au repère galiléen (R_0) :

$$\vec{M}_C(\text{ext} \rightarrow S_2) = \vec{\delta}_C(S_2 / R_0)$$

$$\Leftrightarrow \vec{M}_C(g \rightarrow S_2) + \vec{M}_C(S_0 \rightarrow S_2) + \vec{M}_C(S_I \rightarrow S_2) = \vec{\delta}_C(S_2 / R_0)$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} + \vec{CI} \wedge \vec{R}_I + \vec{0} = \vec{\delta}_C(S_2 / R_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & T_I \\ r \wedge & N_I \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{R_0} = mr^2 \ddot{\beta} \vec{z}_0$$

ce qui conduit à l'équation scalaire suivante :

$$T_I = mr \ddot{\beta} \quad (3)$$

Etude du système (\mathcal{S}) = (S_I) \cup (S_2)

R15- Bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur le système (\mathcal{S}) :

– action de la pesanteur : $[g \rightarrow S_I] = (G, \vec{P}_1)$ avec $\vec{P}_1 = -mg\vec{y}_0$.

$[g \rightarrow S_2] = (C, \vec{P}_2)$ avec $\vec{P}_2 = -mg\vec{y}_0$.

– action du bâti (S_0) sur la tige (S_I) (liaison ponctuelle parfaite) :

$$[A(S_0 \rightarrow S_I)] = (A, \vec{F}_A) = \begin{cases} F_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{R_0} \quad \text{avec } F_A > 0 \text{ pour que le contact soit maintenu.}$$

– action du bâti (S_0) sur le cerceau (S_2) (liaison ponctuelle avec frottement) :

$$[A(S_0 \rightarrow S_2)] = (I, \bar{R}_1) = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} T_1 & 0 \\ N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{R_0} \end{matrix} \quad \text{avec } N_1 > 0 \text{ pour que le contact soit maintenu.}$$

Par suite, le torseur des actions extérieures exercées sur le système (Σ) est donné par :

$$[\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma] = [\bar{S}_2 \rightarrow S_2] = [g \rightarrow S_1] + [g \rightarrow S_2] + [A(S_0 \rightarrow S_1)] + [A(S_0 \rightarrow S_2)]$$

R16- Le vecteur rotation associé au mouvement de (R_1) par rapport à (R_0) est :

$$\bar{\Omega}(R_1 / R_0) = \dot{\alpha} \bar{z}_0$$

R17- Vitesse du point G :

$$\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG} = l \cos \alpha \bar{x}_0 + (r - l \sin \alpha) \bar{y}_0 \quad \text{avec } \alpha < \theta.$$

ce qui donne :

$$\bar{V}(G / R_0) = \left[\frac{d\overline{OG}}{dt} \right]_{R_0} = -l \dot{\alpha} \sin \alpha \bar{x}_0 - l \dot{\alpha} \cos \alpha \bar{y}_0$$

d'où :

$$\bar{V}(G / R_0) = -l \dot{\alpha} (\sin \alpha \bar{x}_0 + \cos \alpha \bar{y}_0)$$

R18- Accélération du point G :

$$\bar{\Gamma}(G / R_0) = \left[\frac{d\bar{V}(G / R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} -l(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ -l(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \end{matrix} \right\}_{R_0} \end{matrix}$$

- Résultante dynamique du système (Σ) par rapport au repère (R_0) :

$$\bar{R}_D(\Sigma / R_0) = \bar{R}_D(S_1 / R_0) + \bar{R}_D(S_2 / R_0) = M \bar{\Gamma}(G / R_0) + m \bar{\Gamma}(C / R_0)$$

d'où :

$$\bar{R}_D(\Sigma / R_0) = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} -l(M + 2m)(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ -Ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 \end{matrix} \right\}_{R_0} \end{matrix}$$

R19- Moment d'inertie de la tige (S_I) par rapport à l'axe (G, \vec{z}_0):

$$I_{Gz_0}(S_I) = \int_{P \in (S_I)} x^2 dm = \lambda \int_{-l}^{+l} x^2 dx = \frac{Ml^2}{3} \text{ car } \lambda = \frac{M}{2l}$$

d'où :

$$I_{Gz_0}(S_I) = \frac{Ml^2}{3}$$

R20- Moment cinétique au point G de la tige (S_I) par rapport à (R_0) :
le moment cinétique au point G de la tige (S_I) est donné par :

$$\vec{\sigma}_G(S_I / R_0) = M_G^{(S_I)} \vec{\Omega}(S_I / R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_I & 0 \\ 0 & 0 & C_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\vec{\sigma}_G(S_I / R_0) = C_I \dot{\alpha} \vec{z}_0 = \frac{Ml^2}{3} \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

R21- Moment dynamique au point G de la tige (S_I) par rapport à (R_0) :

$$\vec{\delta}_G(S_I / R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S_I / R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

d'où :

$$\vec{\delta}_G(S_I / R_0) = C_I \ddot{\alpha} \vec{z}_0 = \frac{Ml^2}{3} \ddot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_I(S_I / R_0) = \vec{\delta}_G(S_I / R_0) + \vec{IG} \wedge \vec{R}_D(S_I / R_0) = \frac{Ml^2}{3} \ddot{\alpha} \vec{z}_0 + \begin{vmatrix} -l \cos \alpha & -Ml(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ r - l \sin \alpha & -Ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{R_0}$$

d'où :

$$\vec{\delta}_I(S_I / R_0) = \left[\frac{Ml^2}{3} \ddot{\alpha} + Ml^2(\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) + Mlr(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \right] \vec{z}_0$$

R22- Le moment dynamique au point I du solide (S_2) par rapport au repère (R_0) est donné par :

$$\bar{\delta}_I(S_2 / R_0) = \bar{\delta}_C(S_2 / R_0) + \overline{IC} \wedge \bar{R}_D(S_2 / R_0) = mr^2 \ddot{\beta} \vec{e}_0 + \begin{vmatrix} 0 & -2ml(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ r \wedge & 0 \\ 0 & 0 \\ R_0 & R_0 \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\bar{\delta}_I(S_2 / R_0) = [mr^2 \ddot{\beta} + 2mrl(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)] \vec{e}_0$$

R23- Le moment dynamique au point I du système (Σ) par rapport au repère (R_0) est donné par :

$$\bar{\delta}_I(\Sigma / R_0) = \bar{\delta}_I(S_1 / R_0) + \bar{\delta}_I(S_2 / R_0)$$

d'où :

$$\bar{\delta}_I(\Sigma / R_0) = \left[\frac{Ml^2}{3} \ddot{\alpha} + mr^2 \ddot{\beta} + (M + 2m)lr(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) + Ml^2(\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) \right] \vec{e}_0$$

R24- Application du principe fondamental de la dynamique au système (Σ) :

- **théorème de la résultante dynamique :**

la résultante de tous les efforts extérieurs exercés sur le système (Σ), notée

$\bar{R}(ext \rightarrow \Sigma)$ est égale à la résultante dynamique $\bar{R}_D(\Sigma / R_0)$.

$$\bar{R}(ext \rightarrow \Sigma) = \bar{R}_D(\Sigma / R_0) \Leftrightarrow \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{R}_I + \bar{F}_A = \bar{R}_D(\Sigma / R_0)$$

ce qui conduit aux deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} T_I + F_A = -l(M + m)(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) & (4) \\ N_I - (m + M)g = -Ml(\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha) & (5) \end{cases}$$

- **théorème de la résultante dynamique :**

le moment au point I de tous les efforts extérieurs exercés sur le système (Σ), noté

$\bar{M}_I(ext \rightarrow \Sigma)$ est égal au moment dynamique au point I du système (Σ).

$$\bar{M}_I(ext \rightarrow \Sigma) = \bar{\delta}_I(\Sigma / R_0)$$

soit

$$\bar{M}_I(g \rightarrow S_1) + \bar{M}_I(g \rightarrow S_2) + \bar{M}_I(S_0 \rightarrow S_1) + \bar{M}_I(S_0 \rightarrow S_2) = \bar{\delta}_I(\Sigma / R_0)$$

$$\Leftrightarrow \overline{IG} \wedge \bar{P}_1 + \overline{IC} \wedge \bar{P}_2 + \overline{IA} \wedge \bar{F}_A + \vec{0} = \bar{\delta}_I(\Sigma / R_0)$$

ou encore

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} -l \cos \alpha \\ r - l \sin \alpha \wedge \\ 0 \end{array} \right|_{R_0} \left. \begin{array}{c} 0 \\ -Mg + \\ 0 \end{array} \right|_{R_0} \left. \begin{array}{c} 0 \\ r \wedge \\ 0 \end{array} \right|_{R_0} \left. \begin{array}{c} 0 \\ -mg + \\ 0 \end{array} \right|_{R_0} \left. \begin{array}{c} -2l \cos \alpha \\ r - 2l \sin \alpha \wedge \\ 0 \end{array} \right|_{R_0} \left. \begin{array}{c} F_A \\ 0 = \\ 0 \end{array} \right|_{R_0} \left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vec{\delta}_I(\Sigma / R_0) \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right|_{R_0}
 \end{array}$$

ce qui conduit à la troisième équation du mouvement :

$$\begin{aligned}
 & Mgl \cos \alpha - (r - 2l \sin \alpha) F_A \\
 & = \frac{Ml^2}{3} \ddot{\alpha} + mr^2 \ddot{\beta} + (M + 2m)lr(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) + Ml^2(\ddot{\alpha} \cos 2\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin 2\alpha)
 \end{aligned} \tag{6}$$

l'ensemble des équations (1) à (6) constitue le système de six équations à sept inconnues, qui ne peut être résolu qu'en lui adjoignant soit une condition de roulement sans glissement, soit la deuxième loi de Coulomb.

PARTIE C - ETUDE ENERGETIQUE

Etude du cerceau (S_2)

R25- L'énergie cinétique du cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0) s'écrit :

$$E_C(S_2 / R_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(C / R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) M_C^{(S_2)} \vec{\Omega}(S_2 / R_0)$$

d'où :

$$E_C(S_2 / R_0) = 2ml^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\beta}^2$$

et

$$\frac{dE_C(S_2 / R_0)}{dt} = 4ml^2(\dot{\alpha} \ddot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha) + mr^2 \dot{\beta} \ddot{\beta}$$

R26- La puissance des efforts extérieurs exercés sur le cerceau (S_2) par rapport au repère (R_0) est donnée par :

$$P(\text{ext} \rightarrow S_2 / R_0) = P(g \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_0 \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0)$$

$$\Leftrightarrow P(\text{ext} \rightarrow S_2 / R_0) = \vec{P}_2 \cdot \vec{V}(C \in S_2 / R_0) + \vec{R}_1 \cdot \vec{V}(I \in S_2 / R_0) + \vec{R}_C \cdot \vec{V}(C \in S_2 / R_0)$$

Remarque

Le fait que la liaison entre la tige (S_1) et le cerceau (S_2) soit une liaison parfaite implique que la puissance $P(S_1 \rightarrow S_2 / R_1)$ des actions de contact de (S_1) sur (S_2) par rapport au repère (R_1) est nulle, mais n'implique pas que la puissance $P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0)$ des mêmes actions par rapport à (R_0) le soit.

$$\vec{V}(I \in S_2 / R_0) = \vec{V}(C \in S_2 / R_0) + \vec{\Omega}(S_2 / R_0) \wedge \overline{CI} = -2l\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{x}_0 + \dot{\beta} \vec{z}_0 \wedge (-r\vec{y}_0)$$

d'où :

$$\vec{V}(I \in S_2 / R_0) = (-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta})\vec{x}_0$$

Il convient de noter que cette vitesse n'est nulle qu'en cas de non glissement entre le solide (S_2) et le bâti (S_0), ce qui n'est pas le cas ici.

Ce qui permet d'écrire :

$$P(ext \rightarrow S_2 / R_0) = 0 + (T_1\vec{x}_0 + N_1\vec{y}_0) \cdot (-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta})\vec{x}_0 + (X_C\vec{x}_0 + Y_C\vec{y}_0) \cdot (-2l\dot{\alpha} \sin \alpha)\vec{x}_0$$

d'où :

$$P(ext \rightarrow S_2 / R_0) = T_1(-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta}) - 2X_C l \dot{\alpha} \sin \alpha$$

R27- Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au cerceau (S_2) s'écrit :

$$\frac{dE_C(S_2 / R_0)}{dt} = P(ext \rightarrow S_2 / R_0)$$

d'où :

$$4ml^2(\ddot{\alpha}\dot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha) + mr^2\dot{\beta}\ddot{\beta} = T_1(-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta}) - 2X_C l \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (7)$$

Etude du système (Σ) = (S_1) \cup (S_2)

R28- L'énergie cinétique du système (Σ) par rapport au repère (R_0) est la somme des énergies cinétiques de chaque solide, soit :

$$E_C(\Sigma / R_0) = E_C(S_1 / R_0) + E_C(S_2 / R_0)$$

$$E_C(S_1 / R_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G / R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S_1 / R_0) M_C^{(S_1)} \vec{\Omega}(S_1 / R_0)$$

donc :

$$E_C(S_1 / R_0) = \frac{2}{3} ml^2 \dot{\alpha}^2$$

d'où l'expression de l'énergie cinétique totale du système :

$$E_C(\Sigma / R_0) = 2 \left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) l^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\beta}^2$$

$$\frac{dE_C(\Sigma / R_0)}{dt} = 4l^2 \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha \right] + mr^2 \dot{\beta} \ddot{\beta}$$

R29- La puissance des efforts extérieurs exercés sur le système (Σ) par rapport au repère (R_0) est donnée par :

$$P(\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0) = P(g \rightarrow S_1 / R_0) + P(g \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0) + P(S_0 \rightarrow S_2 / R_0)$$

où la puissance $P(S_0 \rightarrow S_1 / R_0)$ est nulle du fait que la liaison entre le bâti (S_0) et la tige (S_1) est parfaite, et où les puissances $P(g \rightarrow S_2 / R_0)$ et $P(S_0 \rightarrow S_2 / R_0)$ ont déjà été calculées.

Par suite,

$$P(\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0) = \vec{P}_1 \cdot \vec{V}(G \in S_1 / R_0) + 0 + \vec{P}_2 \cdot \vec{V}(C \in S_2 / R_0) + \vec{R}_1 \cdot \vec{V}(I \in S_2 / R_0)$$

soit :

$$P(\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0) = (-Mg\vec{y}_0) \cdot (-l\dot{\alpha} \sin \alpha \vec{\alpha}_0 - l\dot{\alpha} \cos \alpha \vec{\alpha}'_0) + 0 + T_1(-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta})$$

d'où :

$$P(\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0) = Mgl\dot{\alpha} \cos \alpha + T_1(-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta})$$

La puissance $P(S_1 \leftrightarrow S_2)$ des efforts intérieurs au système (Σ) est nulle du fait que la liaison est parfaite entre les deux solides.

R30- Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système (Σ) s'écrit :

$$\frac{dE_C(\Sigma / R_0)}{dt} = P(\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_0)$$

d'où :

$$4l^2 \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha \right] + mr^2 \dot{\beta} \ddot{\beta} = Mgl\dot{\alpha} \cos \alpha + T_1(-2l\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\beta})$$

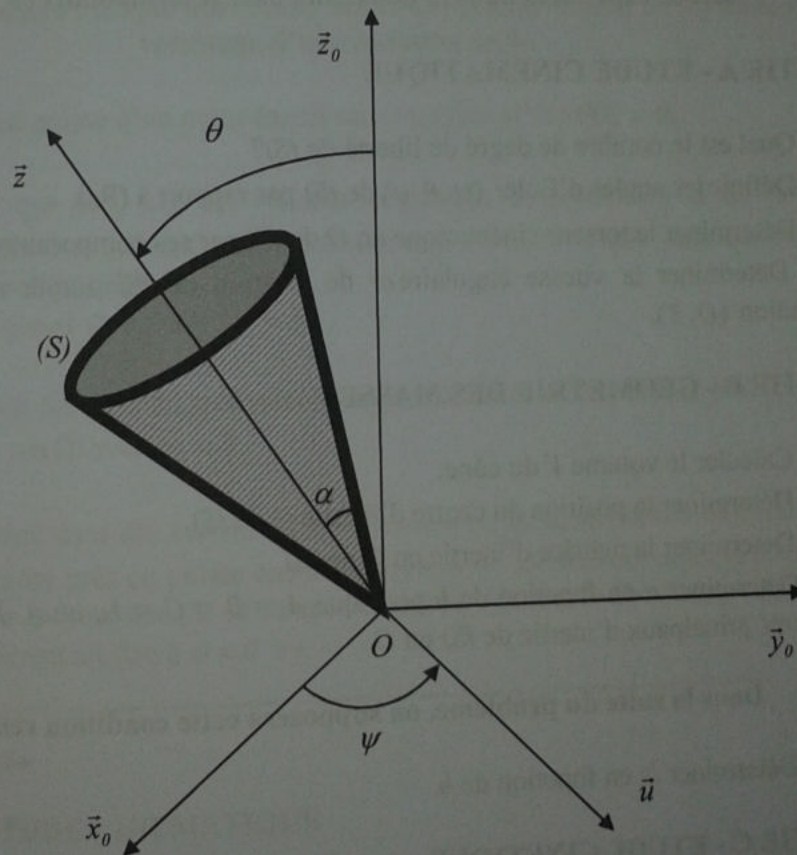
soit, en tenant compte que de la relation que $T_1 = mr\dot{\beta}$ (relation (3)):

$$4l \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha \right] = Mgl \cos \alpha + -2T_1 l \sin \alpha \quad (8)$$

Il convient de noter que l'application du théorème de l'énergie cinétique conduit seulement à deux équations ((7) et (8)) qui ne permettent pas, à elles seules, d'obtenir les équations du mouvement, puisqu'elles font intervenir les inconnues T_1 et X_C .

Problème n° 7 : toupie dormante - Stabilité autour d'une nutation nulle.
Notions abordées

- ☞ Nombre de degrés de liberté
- ☞ Torseur cinématique
- ☞ Centre d'inertie - Matrice d'inertie
- ☞ Moment cinétique - Moment dynamique
- ☞ Energie cinétique
- ☞ Théorème du moment dynamique
- ☞ Théorème de la résultante dynamique
- ☞ Stabilité du mouvement


Figure : description générale du système

Le solide étudié (S) est un cône plein homogène de masse m , de sommet O , d'axe de révolution (O, \vec{z}) , de hauteur h , de demi-angle au sommet α et dont la base circulaire a pour rayon a .

On désigne par $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct supposé galiléen. Au cours de son mouvement, (S) se déplace dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ et son sommet O reste fixe en O au contact d'un plan horizontal. On désigne par $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S) et par \vec{u} le vecteur unitaire de la perpendiculaire commune à \vec{z} et \vec{z}_0 orienté de telle sorte que le trièdre $(\vec{z}_0, \vec{z}, \vec{u})$ soit direct (voir figure). On désigne par $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ et $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ les deux repères intermédiaires et par (ψ, θ, φ) les angles d'Euler habituels.

On suppose que la liaison en O entre (S) et le plan horizontal est parfaite et schématisée par le torseur :

$$[F_{\pi \rightarrow S}] = \begin{cases} \vec{F}_{\pi \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{cases}_O$$

Dans tout ce qui suit, les grandeurs vectorielles et matricielles seront exprimées dans la deuxième base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

- Q1- Quel est le nombre de degré de liberté de (S) ?
- Q2- Définir les angles d'Euler (ψ, θ, φ) de (S) par rapport à (R_0) .
- Q3- Déterminer le torseur cinématique en O de (S) par ses composantes dans (R_2) .
- Q4- Déterminer la vitesse angulaire ω de rotation de (S) autour de son axe de révolution (O, \vec{z}) .

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

- Q5- Calculer le volume V du cône.
- Q6- Déterminer la position du centre d'inertie G de (S) .
- Q7- Déterminer la matrice d'inertie en O de (S) .
- Q8- Déterminer a en fonction de h pour que $A = B = C = I_S$, où A, B et C sont les moments principaux d'inertie de (S) en O .

Dans la suite du problème, on supposera cette condition remplie.

- Q9- Déterminer I_S en fonction de h .

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

- Q10- Déterminer le moment cinétique de (S) en O dans son mouvement par rapport à (R_0) .
- Q11- Déterminer le moment dynamique de (S) en O par rapport à (R_0) .
- Q12- Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à (R_0) .

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

Q13- Déterminer le moment résultant du torseur des actions mécaniques s'exerçant sur (S).

Q14- Appliquer le théorème du moment dynamique à (S) dans (R₀). En déduire les équations du mouvement de (S).

Q15- Sachant qu'à l'instant initial : $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$, $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$. Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire ω .

Q16- Montrer que σ_{z_0} composante selon \vec{z}_0 du moment cinétique $\vec{\sigma}_O(S/R_0)$, est une constante du mouvement que l'on déterminera à partir des conditions initiales précédentes.

Q17- On pose $\sigma = \frac{5\sigma_{z_0}}{6mh^2}$. Déterminer $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction de θ , ω et σ .

Cas particuliers : toupie dormante. Stabilité du mouvement de (S) dans le voisinage d'une nutation nulle.

On dit que (S) est animé d'un mouvement sans nutation si $\forall t : \theta(t) = \theta_0$.

Q18- Montrer que si $\theta_0 \neq 0$, les vitesses angulaires de précession et de rotation propre de (S) sont constantes. Quelle condition doivent-elles remplir pour que ce type de mouvement soit possible ?

Q19- Montrer que si $\theta_0 = 0$ alors $\omega = \sigma$.

On dit que (S) est animé d'un mouvement stable autour de la verticale si $\theta(t)$ est de la forme $\theta(t) = \theta_0 \cos \Omega t$ avec $\theta_0 \approx 0$.

Q20- On se place dans des conditions initiales telles que θ_0 soit voisin de 0, de sorte qu'au second ordre près on puisse encore écrire $\omega = \sigma$. Déterminer alors la condition que doit remplir ω pour que (S) se comporte comme une toupie dormante, c'est-à-dire que son mouvement ait lieu à $\theta \approx 0 \quad \forall t$.

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Dans le cas général un solide possède six degrés de liberté. Dans le cas étudié (S) garde un point fixe et ne possède donc que trois degrés de liberté de rotation.

R2- Les angles d'Euler sont :

- l'angle de précession $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ associé à la rotation (ψ / \vec{z}_0) .

- l'angle de nutation $\theta = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z}_0, \vec{z})$ associé à la rotation (θ / \vec{u}) .

– l'angle de rotation propre $\varphi = (\vec{u}, \vec{x}) = (\vec{w}, \vec{y})$ associé à la rotation (φ / \vec{z}) .

R3- Le torseur cinématique en O de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[\mathcal{G}(S/R_0)]_O = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(O \in S/R_0) \end{cases}$$

avec $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{z}$ et $\vec{V}(O \in S/R_0) = \vec{0}$ car O est un point fixe dans (R_0) .

R4- On a : $\omega = \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \vec{z} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R5- En utilisant les coordonnées cylindriques, on a :

$$V(\text{cône}) = \int_{(S)} dV = \int_{(S)} r dr d\theta dz \int_0^{\frac{a}{h}z} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{a^2}{2h^2} \int_0^h z^2 dz \cdot 2\pi = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

R6- G appartient à l'axe de symétrie de révolution (O, \vec{z}) et par conséquent, on a :

$$z_G = \frac{1}{V} \int_{(S)} z dV = \frac{1}{V} \int_0^h \left[\int_0^{\frac{a}{h}z} r dr \right] z dz \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{V} \left[\frac{\pi a^2}{h^2} \int_0^h z^3 dz \right] = \frac{1}{V} \frac{\pi a^2 h^2}{4} = \frac{3}{4} h$$

R7- L'axe (O, \vec{z}) est un axe de symétrie de révolution pour (S) et les axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) jouent le même rôle. Par conséquent la matrice d'inertie de (S) en O est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

avec $A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{(S)} r^2(z) dV = \rho \int_{(S)} r^2(z) \cdot r dr d\theta dz = \rho \int_0^{\frac{a}{h}z} r^3(z) dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{3}{10} ma^2$$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$$\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_{(S)} z^2 r(z) dr d\theta dz = \rho \int_0^{\frac{a}{h}z} r(z) dr \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^h z^2 \frac{(\frac{a}{h}z)^2}{2} dz = \frac{3}{5} mh^2$$

Calcul de A

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2 = \frac{3}{5} m \left(\frac{a^2}{4} + h^2 \right)$$

d'où :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}m\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}ma^2 \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z})} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z})}$$

R8- Compte tenu de la symétrie de révolution, on a :

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$$

$$\text{d'où : } A = B = C \text{ si } \int_{(S)} z^2 dm = \frac{C}{2}$$

$$\text{or } \int_{(S)} z^2 dm = \frac{3}{5}mh^2 \text{ d'où : } \frac{C}{2} = \frac{3}{20}ma^2 = \frac{3}{5}mh^2 \Leftrightarrow a = 2h$$

R9-

$$I_S = A = B = C = \frac{6mh^2}{5}$$

PARTIE C - ETUDE CINÉTIQUE

R10 Comme O est un point fixe dans (R_0) , alors on a :

$$\vec{\sigma}_O(S/R_0) = M_O^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0) = \frac{6mh^2}{5} [\dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z}]$$

R11- Comme O est un point fixe dans (R_0) , alors on a :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/R_0)}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_O(S/R_0)$$

avec

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \vec{\sigma}_O(S/R_0) = \begin{vmatrix} \dot{\theta} & I_S \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \wedge & I_S \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta & I_S (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \end{vmatrix} = I_S (\dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta \vec{u} - \dot{\theta} \dot{\phi} \vec{w})$$

d'où :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) = \frac{6mh^2}{5} \left[(\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) \vec{u} + \left(\frac{d(\dot{\psi} \sin \theta)}{dt} - \dot{\theta} \dot{\phi} \right) \vec{w} + \frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z} \right]$$

R12- L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est donné par :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} {}^T \bar{\Omega}(S/R_0) M_O^{(S)} \bar{\Omega}(S/R_0)$$

Soit :

$$T(S/R_0) = \frac{3}{5} mh^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta)$$

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

R13- La liaison étant parfaite : $\vec{M}_O(\pi \rightarrow S) = \vec{0}$, il reste donc seulement le moment des actions de pesanteur sur (S) , soit :

$$\vec{M}_O(\bar{S} \rightarrow S) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{3}{4} h\vec{z} \wedge -mg\vec{z}_0 = \frac{3}{4} hmg \sin \theta \vec{u}$$

R14- L'application du théorème du moment dynamique à (S) en O , nous donne :

$$\bar{\delta}_O(S/R_0) = \vec{M}_O(\bar{S} \rightarrow S)$$

d'où :

$$\ddot{\theta} + \left(\dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{5g}{8h} \right) \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) - \dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = 0 \quad (3)$$

R15- L'équation (3) donne $\frac{d\omega}{dt} = 0$, d'où : $\omega(t) = \omega(\theta)$, soit encore :

$$\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = \omega \quad (4)$$

R16- Comme $\bar{\delta}_O(S/R_0) = \frac{3}{4} hmg \sin \theta \vec{u}$, il en résulte que $\bar{\delta}_O(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = 0$, soit :

$$\bar{\delta}_O(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d\bar{\delta}_O(S/R_0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0} = 0 \quad \text{et comme } \vec{z}_0 = \sin \theta \vec{v} + \cos \theta \vec{E}, \text{ il vient :}$$

$$\sigma_z = \frac{6mh^2}{5} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cte = \frac{6mh^2}{5} (\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) \quad (5)$$

R17- Les équations (4) et (5) donnent le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = \omega & (6) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = \dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0 = \sigma & (7) \end{cases}$$

le déterminant de ce système linéaire est : $D = \sin^2 \theta$, d'où :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\omega - \sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} & (8) \\ \dot{\psi} = \frac{\sigma - \omega \cos \theta}{\sin^2 \theta} & (9) \end{cases}$$

Cas particuliers : toupie dormante. Stabilité du mouvement de (S) dans le voisinage d'une nutation nulle.

R18- D'après les relations (8) et (9), si $\forall t : \theta(t) = \theta_0$ alors :

$$\dot{\phi} = \frac{\omega - \sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \dot{\phi}_0 \quad (10)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\sigma - \omega \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \dot{\psi}_0 \quad (11)$$

d'après l'équation (1) puisque $\ddot{\theta} = 0$ alors :

$$\dot{\phi}_0 \dot{\psi}_0 = \frac{5g}{8h} \quad (12)$$

R19- D'après les relations (6) et (7) si $\theta_0 = 0$ alors $\omega = \dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 = \sigma$

R20- L'équation (1) : $\ddot{\theta} + \left(\dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{5g}{8h} \right) \sin \theta = 0$

s'écrit si $\theta \approx 0 \forall t$, $\ddot{\theta} + \left(\dot{\phi} \dot{\psi} - \frac{5g}{8h} \right) \theta = 0$

avec $\dot{\phi} = \frac{\omega - \sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} \approx \frac{\omega}{2}$ et $\dot{\psi} = \frac{\sigma - \omega \cos \theta}{\sin^2 \theta} \approx \frac{\omega}{2}$

d'où : $\dot{\phi} \dot{\psi} = \frac{\omega^2}{4}$

et l'équation $\ddot{\theta} + \left(\frac{\omega^2}{4} - \frac{5g}{8h} \right) \theta = 0$ possède une solution oscillatoire du type

$\theta(t) = \theta_0 \cos \Omega t$ si $\Omega^2 = \frac{\omega^2}{4} - \frac{5g}{8h} > 0$ soit $\omega^2 > \frac{5g}{2h}$.

Problème n° 8 : étude du mouvement d'un culbuto

Notions abordées

- ☞ Matrice d'inertie
- ☞ Torseur cinétique
- ☞ Torseur dynamique
- ☞ Energie cinétique
- ☞ Torseur des actions extérieures
- ☞ Théorèmes généraux
- ☞ Théorème de l'énergie cinétique
- ☞ Intégrale première du mouvement
- ☞ Intégrale première de l'énergie cinétique

Un solide de révolution (S) est constitué par une demi-sphère (S_1) et un cylindre (S_2) de même base. On désigne par a le rayon de cette base et par H son centre ; la hauteur du cylindre circulaire (S_2) est notée h . (S_1) et (S_2) sont des solides pleins homogènes de masses respectives m_1 et m_2 et de même masse volumique ρ . On note (H, \vec{z}) l'axe de révolution du solide (S) orienté de (S_1) vers (S_2) , et $R(H, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié à (S) .

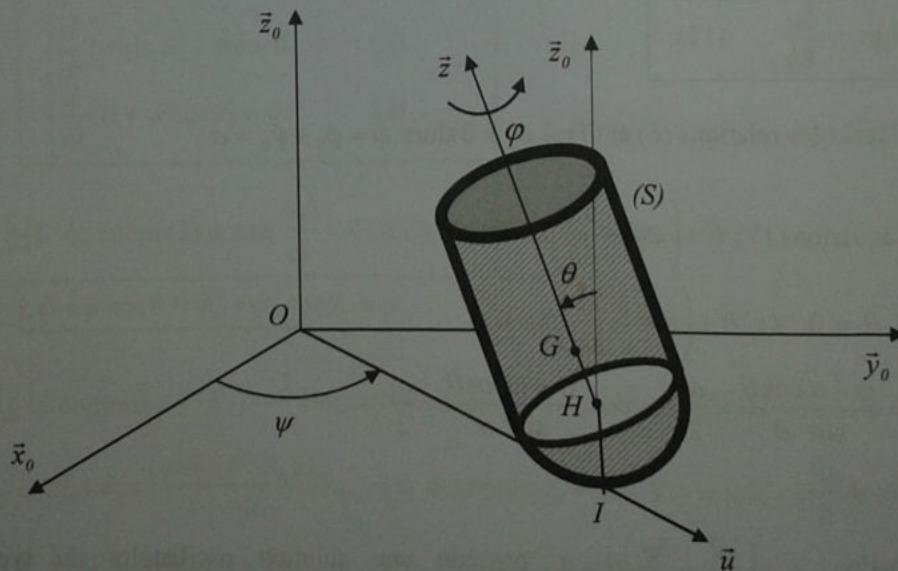


Figure : description générale du système étudié

On note M la masse totale du système et G son centre d'inertie tel que $\overline{HG} = L\vec{z}$.
On désigne par (x, y, z) les coordonnées de G dans (R_0) et par (ψ, θ, φ) les angles d'Euler qui déterminent la position de (S) par rapport à (R_0) .

On considère un repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ considéré comme galiléen. Le solide (S) est situé dans le demi-espace $z_0 > 0$; il est assujéti à se déplacer de telle façon que la partie hémisphérique soit en contact avec le plan $(\pi) = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Cette liaison de contact ponctuel est réalisée sans frottement.

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

- Q1-** Représenter les figures de calcul et en déduire l'expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$.
Q2- Déterminer la condition géométrique de contact entre (S) et le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Dans la suite du problème, on suppose que cette condition est remplie.

- Q3-** Donner les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
Q4- Calculer la vitesse de glissement en I de (S) par ses composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

- Q5-** Déterminer la position du centre d'inertie G du système. En déduire l'expression de L en fonction de a et h .
Q6- Déterminer la matrice d'inertie en H de la demi-sphère (S_1) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Q7- Déterminer la matrice d'inertie en H du cylindre (S_2) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Q8- Déterminer la matrice d'inertie en H du système (S) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Q9- En déduire la matrice d'inertie en G du système (S) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

PARTIE C - ETUDE CINETIQUE

- Q10-** Déterminer le torseur cinétique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
Q11- Déterminer le torseur dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) .
Q12- Calculer l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) .

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

On suppose que la liaison ponctuelle en I est parfaite.

- Q13-** Donner l'expression du torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur (S) .

- Q14-** En utilisant les théorèmes généraux, établir les équations du mouvement en cherchant à mettre en évidence les intégrales premières du mouvement.
- Q15-** Appliquer le théorème de l'énergie cinétique. En déduire une intégrale première du mouvement.
- Q16-** Etudier la possibilité de mouvements telle que l'axe (G, \vec{z}) garde une inclinaison constante θ_0 par rapport à (G, \vec{z}_0) .

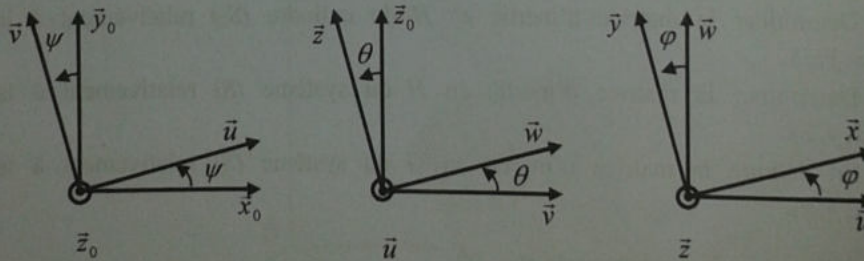
On suppose que (S) roule sans glisser sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

- Q17-** Ecrire les équations traduisant le non glissement en I de (S) sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.
- Q18-** Faire le bilan des efforts extérieurs exercés sur (S) .
- Q19-** En utilisant les théorèmes généraux, établir les équations du mouvement en cherchant à mettre en évidence des intégrales premières du mouvement.
- Q20-** Peut-on écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique? Pourquoi?

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE

R1- Figures de calcul :



on en déduit que $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}$

R2- La condition géométrique de contact entre (S) et le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est :

$$\overline{OI} \cdot \vec{z}_0 = 0 \Rightarrow (\overline{OG} + \overline{GI}) \cdot \vec{z}_0 = (x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 - L\vec{z} - a\vec{z}_0) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\Rightarrow z - L \cos \theta - a = 0$$

d'où :

$$z = a + L \cos \theta$$

R3- Les éléments de réduction en G du torseur cinématique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) sont :

$$[g(S/R_0)]_G = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(G/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}$$

et

$$\vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + (a + L\cos\theta)\vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0$$

d'où :

$$[g(S/R_0)]_G = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} \\ \vec{V}(G/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0 \end{cases}$$

R4- La vitesse de glissement en I de (S) est :

$$\begin{aligned} \vec{V}_g(I, S/R_0) &= \vec{V}(I \in S/R_0) = \vec{V}(G \in S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GI} \\ &= \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0 + (\dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z}) \wedge (-L\vec{z} - a\vec{z}_0) \\ &= \dot{x}(\cos\psi\vec{u} - \sin\psi\vec{v}) + \dot{y}(\sin\psi\vec{u} + \cos\psi\vec{v}) - L\dot{\theta}\sin\theta\vec{z}_0 - L\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} + L\dot{\theta}\dot{\psi}\vec{v} + a\dot{\theta}\vec{v} + a\dot{\varphi}\sin\theta\vec{u} \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{V}_g(I, S/R_0) = (\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - L\dot{\psi}\sin\theta + a\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{u} + (-\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + L\dot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta})\vec{v}$$

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

R5- Déterminons la position du centre d'inertie G_I de la demi-sphère.

$$z_{G_I} = \frac{1}{m_1} \int_{(S_1)} z dm = \frac{1}{V_1} \int_{(S_1)} z dV \quad \text{où } V_1 \text{ est le volume de } (S_1).$$

En coordonnées sphériques (θ longitude et φ co-latitude), on a :

$$\begin{cases} z = r \cos \varphi \\ dV = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

donc :

$$z_{G_I} = \frac{1}{V_1} \int_{(S_1)} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = \frac{1}{V_1} \int_0^a r^3 dr \int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{3}{8}a$$

d'où :

$$\overrightarrow{HG_I} = -\frac{3}{8}a\vec{z}$$

Le centre d'inertie G de (S) est donné par la relation d'associativité :

$$\overline{HG} = \frac{m_1 \overline{OG_1} + m_2 \overline{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} m_1 = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \\ m_2 = \pi a^2 h \rho \\ \overline{HG_2} = \frac{h}{2} \vec{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{HG} = \frac{6h^2 - 3a^2}{4(2a + 3h)} \vec{z} = L \vec{z}$$

d'où

$$L = \frac{6h^2 - 3a^2}{4(2a + 3h)}$$

R6- Déterminons la matrice d'inertie en H de la demi-sphère (S_1) relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Les plans (H, \vec{x}, \vec{z}) et (H, \vec{y}, \vec{z}) sont des plans de symétrie matérielle pour (S_1) , les produits d'inertie sont donc tous nuls. Par ailleurs les axes (H, \vec{x}) et (H, \vec{y}) jouent le même rôle, donc :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$$

Calcul de C

$$C = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{2}{5} m_1 a^2$$

$$\text{Calcul de } C' = \int_{(S)} z^2 dm$$

$$C' = \int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{m_1 a^2}{5}$$

$$\text{ainsi : } A = B = \frac{C}{2} + C' = \frac{2}{5} m_1 a^2$$

d'où :

$$M_H^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} m_1 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m_1 a^2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

R7- Compte tenu de la symétrie de révolution, la matrice d'inertie de (S_2) en H s'écrit :

$$M_H^{(S_2)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

avec : $A = B = \frac{C}{2} + \int_{(S_2)} z^2 dm$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S_2)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{(S_2)} r^2 \cdot r dr d\theta dz = \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{m_2 a^2}{2}$$

Calcul de $C' = \int_{(S_2)} z^2 dm$

$$C' = \int_{(S_2)} z^2 dm = \rho \int_{(S_2)} z^2 \cdot r dr d\theta dz = \rho \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2 dz = \frac{m_2 h^2}{3}$$

Calcul de A

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S_2)} z^2 dm = \frac{m_2 a^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{3}$$

d'où :

$$M_H^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2 a^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 a^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{2} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

R8- Déterminons la matrice d'inertie en H du système (S) relativement à la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

$$M_H^{(S)} = M_H^{(S_1)} + M_H^{(S_2)}$$

d'où :

$$M_H^{(S)} = \begin{pmatrix} m_2 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) + \frac{2}{5} m_1 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) + \frac{2}{5} m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{2} + \frac{2}{5} m_1 a^2 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

R9 Matrice d'inertie en G du système (S) relativement à la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

D'après le théorème de Huygens généralisé, on a :

$$\begin{cases} A_G = B_G = A - ML^2 \\ C_G = C \end{cases}$$

$$\text{avec : } L = \frac{6h^2 - 3a^2}{4(2a + 3h)}$$

d'où :

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

avec :

$$\begin{cases} A_G = m_2 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) + \frac{2}{5} m_1 a^2 - M \left[\frac{6h^2 - 3a^2}{4(2a + 3h)} \right]^2 \\ C_G = \frac{m_2 a^2}{2} + \frac{2}{5} m_1 a^2 \end{cases}$$

PARTIE C - ETUDE CINÉTIQUE

R10 Le moment cinétique en G de (S) par ses composantes dans la base $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{z})$ est :

$$[C(S/R_0)]_G = \begin{cases} M\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}_G(S/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{V}(G/R_0) = \dot{x}\bar{x}_0 + \dot{y}\bar{y}_0 - L\dot{\theta} \sin \theta \bar{z}_0$$

et

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = M_G^{(S)} \cdot \vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= A_G \dot{\theta} \bar{u} + A_G \dot{\psi} \sin \theta \bar{w} + C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{z}$$

$$\text{car } \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi} \bar{z}_0 + \dot{\theta} \bar{u} + \dot{\phi} \bar{z} = \dot{\theta} \bar{u} + \dot{\psi} \sin \theta \bar{w} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{z}$$

d'où :

$$[C(S/R_0)]_G = \begin{cases} M\vec{V}(G/R_0) = M(\dot{x}\bar{x}_0 + \dot{y}\bar{y}_0 - L\dot{\theta} \sin \theta \bar{z}_0) \\ \vec{\sigma}_G(S/R_0) = A_G \dot{\theta} \bar{u} + A_G \dot{\psi} \sin \theta \bar{w} + C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{z} \end{cases}$$

R11- Le torseur dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$[D(S/R_0)]_G = \begin{cases} M\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_G(S/R_0) \end{cases}$$

avec

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - L\dot{\theta} \sin \theta \vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

$$= \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0 - L(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{z}_0$$

et

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} + \vec{\Omega}((\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S/R_0)$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \right]_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} = A_G \ddot{\theta} \vec{u} + A_G (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{w} + C_G (\ddot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}((\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})/R_0) \wedge \vec{\sigma}_G(S/R_0) = \begin{vmatrix} \dot{\theta} & A_G \dot{\theta} & (C_G - A_G) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C_G \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \sin \theta & A_G \dot{\psi} \sin \theta & (A_G - C_G) \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta - C_G \dot{\theta} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \cos \theta & C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) & 0 \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0)_{(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})} = \begin{cases} A_G \ddot{\theta} + (C_G - A_G) \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C_G \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ A_G (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) + (A_G - C_G) \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta - C_G \dot{\theta} \dot{\phi} \\ C_G (\ddot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{cases}$$

R12- L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0) est :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2} M \vec{V}^2(G/R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) M_G^{(S)} \vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$= \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{A_G}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{A_G}{2} (\dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{C_G}{2} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

PARTIE D - ETUDE DYNAMIQUE

On suppose que la liaison ponctuelle en I est parfaite.

R13- Le torseur des actions extérieures agissant sur (S) s'écrit :

$$[A(\bar{S} \rightarrow S)]_G = \begin{cases} -Mg\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_G + \begin{cases} Z\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_I = \begin{cases} -Mg\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_G + \begin{cases} Z\vec{z}_0 \\ -ZL\vec{z} \wedge \vec{z}_0 \end{cases}_G = \begin{cases} (Z - Mg)\vec{z}_0 \\ ZL \sin \theta \vec{u} \end{cases}_G$$

R14- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (S) en G s'écrit :

$$[A(\bar{S} \rightarrow S)] = [D(S/R_0)]$$

le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{\Gamma}(G/R_0) \Leftrightarrow (Z - Mg)\vec{z}_0 = M\vec{\Gamma}(G/R_0)$$

on en déduit que :

$$M\vec{\Gamma}(G/R_0) \cdot \vec{x}_0 = 0 \Rightarrow M\vec{V}(G/R_0) \cdot \vec{x}_0 = Cte$$

d'où :

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \quad (1) \quad (\text{première intégrale première})$$

et

$$M\vec{\Gamma}(G/R_0) \cdot \vec{y}_0 = 0 \Rightarrow M\vec{V}(G/R_0) \cdot \vec{y}_0 = Cte$$

d'où :

$$\dot{y} = \dot{y}_0 \quad (2) \quad (\text{deuxième intégrale première})$$

le théorème du moment dynamique appliqué à (S) en G s'écrit :

$$\Sigma \vec{M}_G(F_{ext}) = \vec{\delta}_G(S/R_0) \Leftrightarrow ZL \sin \theta \vec{u} = \vec{\delta}_G(S/R_0)$$

on en déduit que :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \vec{z}]_{R_0} - \vec{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_0} = 0 \Leftrightarrow \vec{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \vec{z} = Cte$$

$$\text{or } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = A_G \theta \vec{u} + A_G \dot{\psi} \sin \theta \vec{w} + C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z}$$

d'où :

$$\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta = r_0 = Cte \quad (3) \quad (\text{troisième intégrale première})$$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \vec{z}_0]_{R_0} - \vec{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0} = 0 \Leftrightarrow \vec{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = Cte$$

d'où :

$$A_G \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_G r_0 \cos \theta = k = Cte \quad (4) \quad (\text{quatrième intégrale première})$$

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_H(S/R_0) \cdot \bar{u} &= [\overline{HG}, -Mg\bar{z}_0, \bar{u}] = MgL \sin \theta \\ \bar{\delta}_H(S/R_0) \cdot \bar{u} &= \left[\bar{\delta}_G(S/R_0) + \overline{HG} \wedge M\bar{\Gamma}(G/R_0) \right] \cdot \bar{u} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [\bar{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \bar{u}]_{R_0} - \bar{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \left[\frac{d\bar{u}}{dt} \right]_{R_0} - ML\bar{\Gamma}(G/R_0) \cdot \bar{w} \\ &= A_G \ddot{\theta} - \dot{\psi} (A_G \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta - C_G r_0 \sin \theta) + ML^2 (\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta\end{aligned}$$

d'où :

$$(A_G + ML^2 \sin^2 \theta) \ddot{\theta} + (ML^2 \dot{\theta}^2 - A_G \dot{\psi}^2) \sin \theta \cos \theta + C_G r_0 \dot{\psi} \sin \theta = MgL \sin \theta \quad (5)$$

(cinquième intégrale première)

R15 Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{dE_c(S/R_0)}{dt} = P(F_{ext}) = Z\bar{z}_0 \cdot \bar{V}(I \in S/R_0) - Mg\bar{z}_0 \cdot \bar{V}(G/R_0) = MgL \dot{\theta} \sin \theta = \frac{d}{dt} (-MgL \cos \theta) = \frac{dE_p(S)}{dt}$$

d'où l'intégrale première de l'énergie cinétique :

$$M(gL \cos \theta + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + A_G (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 = Cte \quad (6)$$

R16 Possibilités de mouvements tel que $\theta = \theta_0 = Cte$:

on doit alors avoir $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$ (mouvement stationnaire).

De tels mouvements peuvent exister si les cinq équations du mouvement sont toutes vérifiées pour $\theta = \theta_0 = Cte$. Ainsi, les relations (1) et (2) n'étant pas en cause ici, il faut :

$$- \text{d'après (4)} : \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = Cte$$

$$- \text{d'après (3)} : \dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = Cte$$

$$- \text{d'après (5)} :$$

$$- A_G \dot{\psi}_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + C_G (\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 - MgL \sin \theta_0 = 0$$

$$\text{soit : } \sin \theta_0 [C_G (\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \theta_0) \dot{\psi}_0 - A_G \dot{\psi}_0^2 \cos \theta_0 - MgL] = 0$$

d'où :

$$\sin \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0, (S) \text{ étant au-dessus du plan } (O, \bar{x}_0, \bar{y}_0).$$

ou

$$\cos \theta_0 = \frac{MgL - C_G \dot{\phi}_0 \dot{\psi}_0}{(C_G - A_G) \dot{\psi}_0^2}, \text{ qui existe si : } 0 \leq \frac{MgL - C_G \dot{\phi}_0 \dot{\psi}_0}{(C_G - A_G) \dot{\psi}_0^2} \leq 1.$$

On suppose que (S) roule sans glisser sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

R17- La vitesse de glissement de (S) sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ se traduit par :

$$\vec{V}_g(I, S / R_0) = \vec{0}$$

ce qui conduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi + (a\dot{\phi} - L\dot{\psi}) \sin \theta = 0 \\ -\dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi + (a + L \cos \theta)\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

R18- Le bilan des efforts extérieurs exercés sur (S) est :

$$[F_{ext}] = [g \rightarrow S] + [\pi \rightarrow S]$$

avec :

$$[g \rightarrow S] = \begin{cases} -Mg\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}_G$$

et

$$[\pi \rightarrow S] = \begin{cases} X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{z}_0 \\ 0 \end{cases}_I = \begin{cases} X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{z}_0 \\ -a\vec{z}_0 \wedge (X\vec{u} + Y\vec{v}) \end{cases}_H = \begin{cases} X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{z}_0 \\ (-a\vec{z}_0 - L\vec{z}) \wedge (X\vec{u} + Y\vec{v}) \end{cases}_G$$

R19- Le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{\Gamma}(G / R_0) \Leftrightarrow (Z - Mg)\vec{z}_0 + X\vec{u} + Y\vec{v} = M\vec{\Gamma}(G / R_0)$$

d'où :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = X \cos \psi - Y \sin \psi & (7) \\ M\ddot{y} = X \sin \psi + Y \cos \psi & (8) \end{cases}$$

X et Y seront connus dès que le mouvement sera établi.

Le théorème du moment dynamique appliqué à (S) en I s'écrit :

$$\Sigma \vec{M}_I(F_{ext}) = \vec{\delta}_I(S / R_0) \Leftrightarrow (a\vec{z}_0 + L\vec{z}) \wedge -Mg\vec{z}_0 = \vec{\delta}_I(S / R_0) \Leftrightarrow -MgL \sin \theta \vec{u} = \vec{\delta}_I(S / R_0)$$

$$\vec{\delta}_I(S / R_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 = \vec{\delta}_H(S / R_0) \cdot \vec{z}_0 = \left[\vec{\delta}_G(S / R_0) + \overline{HG} \wedge M\vec{\Gamma}(G / R_0) \right] \cdot \vec{z}_0$$

$$= \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_G(S / R_0) \cdot \vec{z}_0] + ML(\vec{z}_0 \wedge \vec{z})$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} [A_G \dot{\psi} \sin^2 \theta + C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta] + ML \sin \theta (\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi) = 0$$

(première intégrale première) (9)

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_I(S/R_0) \cdot \bar{v} = 0 &= \left[\bar{\delta}_G(S/R_0) + \overline{IG} \wedge \overline{M\Gamma}(G/R_0) \right] \bar{v} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \bar{v} \right]_{R_0} - \bar{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \left[\frac{d\bar{v}}{dt} \right]_{R_0} + M(\bar{v} \wedge \overline{IG}) \overline{\Gamma}(G/R_0) \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} [A_G \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta - C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \sin \theta] + A_G \dot{\psi} \dot{\theta} + M(a + L \cos \theta)(\ddot{x} \cos \psi + \ddot{y} \sin \psi) = 0$$

(deuxième intégrale première) (10)

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_I(S/R_0) \cdot \bar{u} = 0 &= MgL \sin \theta = \left[\bar{\delta}_G(S/R_0) + \overline{IG} \wedge \overline{M\Gamma}(G/R_0) \right] \bar{u} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \bar{u} \right]_{R_0} - \bar{\sigma}_G(S/R_0) \cdot \left[\frac{d\bar{u}}{dt} \right]_{R_0} + M(\bar{u} \wedge \overline{IG}) \overline{\Gamma}(G/R_0) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} A_G \ddot{\theta} - A_G \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C_G (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta - M(a + L \cos \theta)(\ddot{y} \cos \psi - \ddot{x} \sin \psi) \\ + ML^2 \sin \theta (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = MgL \sin \theta \end{aligned}$$

(troisième intégrale première) (11)

la liaison ponctuelle en I nécessite les cinq paramètres x, y, ψ, θ et φ et par conséquent les équations (7) à (11) traduisent les équations du mouvement.

R20- Oui, on peut écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique car le contact en I est parfait.

Problème n° 9 : mouvement de deux tiges articulées
Notions abordées

- ☞ Torseur dynamique
- ☞ Torseur des actions extérieures
- ☞ Théorème du moment dynamique
- ☞ Théorème de la résultante dynamique
- ☞ Stabilité du mouvement

On considère un système mécanique constitué par deux solides (S_1) et (S_2) mobiles dans le plan vertical $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ du repère orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen où (O, \vec{z}_0) est vertical ascendant. On note le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{z}_0$.

- (S_1) est une tige OC homogène, de longueur $2b$, de centre G , de masse M , articulée en O autour de l'axe (O, \vec{y}_0) .
- (S_2) est une tige rectiligne AB , homogène, de longueur $2d$, de masse m , de milieu P , articulée autour de l'axe (P, \vec{y}_0) , au point P de (S_1) situé à la distance $c < 2b$ de O .

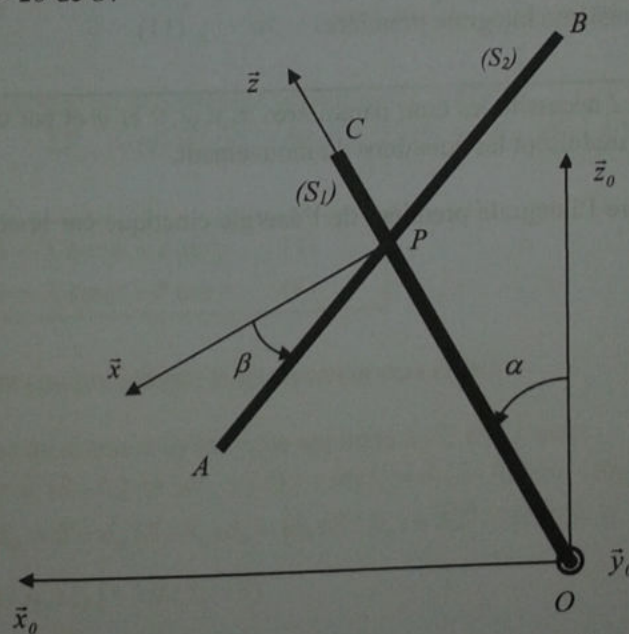


Figure : description générale du système

On attache au solide (S_1) un repère $R_1(P, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$ où (P, \vec{z}) est dirigé selon OC et on utilisera dans la suite la base $(\vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z})$ comme base de projection.

Les positions des deux solides sont repérées par les angles $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z})$ et $\beta = (\vec{x}, \vec{PA})$.

La liaison entre l'axe (O, \vec{y}_0) et (S_1) est une liaison pivot parfaite. Le torseur des actions qu'exerce la tige (S_1) sur la tige (S_2) s'écrit en P :

$$[F(S_1 \rightarrow S_2)]_P = \begin{cases} \vec{R} = R_x \vec{x} + R_z \vec{z} \\ \vec{M}(P) = \lambda(Mb + mc)g\alpha\vec{y}_0 \end{cases}$$

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE ET CINETIQUE

- Q1-** Déterminer les torseurs cinématiques de (S_1) en O et de (S_2) en P .
Q2- Déterminer les torseurs cinétiques par rapport à (R_0) de (S_1) en O et de (S_2) en P .
Q3- Déterminer les torseurs dynamiques de (S_1) en O et de (S_2) en P .

PARTIE B - ETUDE DYNAMIQUE

- Q4-** Déterminer la composante selon \vec{y}_0 du moment en O du torseur des actions s'exerçant sur (S_1) : $\vec{M}_O(\vec{S}_1 \rightarrow S_1) \cdot \vec{y}_0$.
Q5- Déterminer en P le torseur des actions s'exerçant sur (S_2) : $[F(\vec{S}_2 \rightarrow S_2)]$
Q6- Ecrire le théorème du moment dynamique en O pour la tige (S_1) en projection sur \vec{y}_0 .
Q7- Ecrire le théorème du moment dynamique en P pour la tige (S_2) en projection sur \vec{y}_0 .
Q8- Ecrire le théorème de la résultante dynamique pour la tige (S_2) . En déduire les composantes de \vec{R} en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.
Q9- Former le système d'équations différentielles formées par α et β .

PARTIE C - STABILITE DU MOUVEMENT

On cherche les conditions qui permettent de stabiliser le mouvement de (S_1) au voisinage de la verticale. On suppose maintenant que les angles α et β restent petits au cours du mouvement.

On dit que (S_1) a un mouvement stable autour de la position $\alpha = 0$ si $\alpha(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps.

- Q10-** Quelle condition doit satisfaire λ pour que la stabilité de la barre OC soit réalisée ?
Q11- A $t = 0$ on a : $\alpha = \alpha_0, \beta = 0, \dot{\alpha} = 0$ et $\dot{\beta} = 0$. Déterminer $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

Solution détaillée

PARTIE A - ETUDE CINEMATIQUE ET CINETIQUE

R1-

$$[\mathcal{G}(S_1 / R_0)] = \begin{cases} \vec{\Omega}(S_1 / R_0) = \dot{\alpha} \vec{y}_0 \\ \vec{V}(O / R_0) = \vec{0} \end{cases}$$

et

$$[\mathcal{G}(S_2 / R_0)] = \begin{cases} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_0 \\ \vec{V}(P / R_0) = \vec{V}(O / R_0) + \vec{\Omega}(S_1 / R_0) \wedge \vec{OP} = c \dot{\alpha} \vec{x} \end{cases}$$

R2-

$$[C(S_1 / R_0)] = \begin{cases} \vec{R}_C(S_1 / R_0) = M \vec{V}(G / R_0) = Mb \dot{\alpha} \vec{x} \\ \vec{\sigma}_O(S_1 / R_0) = \frac{4}{3} Mb^2 \dot{\alpha} \vec{y}_0 \end{cases}$$

car $\vec{V}(G / R_0) = b \left[\frac{d\vec{z}}{dt} \right]_{R_0} = b(\dot{\alpha} \vec{y}_0 \wedge \vec{z}) = b \dot{\alpha} \vec{x}$

et $\vec{\sigma}_O(S_1 / R_0) = M_O^{(S_1)} \vec{\Omega}(S_1 / R_0) = I_{Oy} \dot{\alpha} \vec{y}_0 = \frac{4}{3} Mb^2 \dot{\alpha} \vec{y}_0$

où $I_{Oy} = \int_{P \in (S_1)} z^2 dz = \lambda \int_0^{2b} z^2 dz = \frac{M}{2b} \frac{8b^3}{3} = \frac{4}{3} Mb^2$

$$[C(S_2 / R_0)] = \begin{cases} \vec{R}_C(S_2 / R_0) = m \vec{V}(P / R_0) = mc \dot{\alpha} \vec{x} \\ \vec{\sigma}_P(S_2 / R_0) = \frac{1}{3} md^2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_0 \end{cases}$$

car $\vec{V}(P / R_0) = c \dot{\alpha} \vec{x}$

et $\vec{\sigma}_P(S_2 / R_0) = M_P^{(S_2)} \vec{\Omega}(S_2 / R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{md^3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{md^3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{md^3}{3} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{y}_0$

car $I_{Oy_0} = \int_{P \in (S_2)} X^2 dX = \lambda \int_{-d}^{+d} X^2 dX = \frac{m}{2d} \frac{2d^3}{3} = m \frac{d^2}{3}$

R3- Torseur dynamique de (S_1) en O :

$$[D(S_1 / R_0)]_O = \begin{cases} \bar{R}_D(S_1 / R_0) = M\bar{\Gamma}(G / R_0) \\ \bar{\delta}_O(S_1 / R_0) \end{cases}$$

$$\text{avec } \bar{\Gamma}(G / R_0) = \left[\frac{d\bar{V}(G / R_0)}{dt} \right]_{R_0} = b\ddot{\alpha}\bar{x} + b\dot{\alpha} \left[\frac{d\bar{x}}{dt} \right]_{R_0} = b\ddot{\alpha}\bar{x} + b\dot{\alpha}(\dot{\alpha}\bar{y}_0 \wedge \bar{x})$$

d'où :

$$\bar{\Gamma}(G / R_0) = b\ddot{\alpha}\bar{x} - b\dot{\alpha}^2\bar{z}$$

par ailleurs

$$\bar{\delta}_O(S_1 / R_0) = \left[\frac{\bar{\sigma}_O(S_1 / R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \frac{4}{3} Mb^2 \ddot{\alpha} \bar{y}_0$$

Torseur dynamique de (S_2) en P :

$$[D(S_2 / R_0)]_P = \begin{cases} \bar{R}_D(S_2 / R_0) = M\bar{\Gamma}(P / R_0) \\ \bar{\delta}_P(S_2 / R_0) \end{cases}$$

avec

$$\bar{\Gamma}(P / R_0) = \left[\frac{d\bar{V}(P / R_0)}{dt} \right]_{R_0} = c\ddot{\alpha}\bar{x} + c\dot{\alpha} \left[\frac{d\bar{x}}{dt} \right]_{R_0} = c\ddot{\alpha}\bar{x} + c\dot{\alpha}(\dot{\alpha}\bar{y}_0 \wedge \bar{x})$$

d'où :

$$\bar{\Gamma}(P / R_0) = c\ddot{\alpha}\bar{x} - c\dot{\alpha}^2\bar{z}$$

par ailleurs

$$\bar{\delta}_P(S_2 / R_0) = \left[\frac{\bar{\sigma}_P(S_2 / R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \frac{1}{3} md^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \bar{y}_0$$

PARTIE B - ETUDE DYNAMIQUE

$$\text{R4- } \bar{M}_O(\bar{S}_1 \rightarrow S_1) \cdot \bar{y}_0 = \left[\overline{OG} \wedge M\bar{g} - \left(\bar{M}(P) + \overline{OP} \wedge \bar{R} \right) \right] \cdot \bar{y}_0$$

d'où :

$$\bar{M}_O(\bar{S}_1 \rightarrow S_1) \cdot \bar{y}_0 = Mgb \sin \alpha - \lambda(Mb + mc)g\alpha - cR_x$$

R5 Le torseur des actions s'exerçant sur (S_2) en P est :

$$[F(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)]_P = \begin{cases} m\vec{g} + \vec{R} \\ \vec{M}(P) \end{cases}$$

soit :

$$[F(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)]_P = \begin{cases} (mg \sin \alpha + R_x)\vec{x} + (R_z - mg \cos \alpha)\vec{z} \\ \vec{M}(P) = \lambda(Mb + mc)g\alpha\vec{y}_0 \end{cases}$$

R6 Le théorème du moment dynamique appliqué en O pour la tige (S_1) en projection sur \vec{y}_0 est :

$$\begin{aligned} \delta_O(S_1 / R_0) \cdot \vec{y}_0 &= \vec{M}_O(\bar{S}_1 \rightarrow S_1) \cdot \vec{y}_0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}Mb^2\ddot{\alpha} &= Mgb \sin \alpha - \lambda(Mb + mc)g\alpha - cR_x \quad (1) \end{aligned}$$

R7 Le théorème du moment dynamique appliqué en P pour la tige (S_2) en projection sur \vec{y}_0 est :

$$\begin{aligned} \delta_P(S_2 / R_0) \cdot \vec{y}_0 &= \vec{M}_P(\bar{S}_2 \rightarrow S_2) \cdot \vec{y}_0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}md^2(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) &= \lambda(Mb + mc)g\alpha \end{aligned}$$

R8 Le théorème de la résultante dynamique pour la tige (S_2) s'écrit :

$$\vec{R} - mg\vec{z}_0 = M\vec{\Gamma}(P / R_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mc\ddot{\alpha} = mg \sin \alpha + R_x \\ -mc\dot{\alpha}^2 = (R_z - mg \cos \alpha) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} R_x = mc\ddot{\alpha} - mg \sin \alpha \\ R_z = mg \cos \alpha - mc\dot{\alpha}^2 \end{cases}$$

R9- En utilisant l'équation (1) et la valeur de R_X ci-dessus, il vient :

$$\begin{cases} \frac{4}{3} Mb^2 \ddot{\alpha} = Mgb \sin \alpha - \lambda(Mb + mc)g\alpha - c(mc\ddot{\alpha} - mg \sin \alpha) \\ \left(\frac{4}{3} Mb^2 + mc^2\right) \ddot{\alpha} = (Mb + mc)g \sin \alpha - \lambda(Mb + mc)g\alpha \\ \frac{1}{3} md^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) = \lambda(Mb + mc)g\alpha \end{cases} \quad (2)$$

PARTIE C - STABILITE DU MOUVEMENT

R10- En tenant compte de α petit, on a : $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$.

L'équation (2) conduit à :

$$\ddot{\alpha} + \frac{(Mb + mc)g(\lambda - 1)}{\frac{4}{3} Mb^2 + mc^2} \alpha = 0 \quad (3)$$

la position $\alpha = 0$ est stable si $\lambda > 1$.

R11- On pose :

$$\Omega^2 = \frac{(Mb + mc)g(\lambda - 1)}{\frac{4}{3} Mb^2 + mc^2}$$

on a donc, comme solution de l'équation différentielle (3) : $\alpha = A \cos(\Omega t + \phi)$.

avec $\alpha = \alpha_0$ et $\dot{\alpha} = 0$ à $t = 0$:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\beta} = -\ddot{\alpha} + \frac{3\lambda(Mb + mc)}{md^2} g\alpha$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\beta} = \alpha_0 \Omega^2 \cos(\Omega t) + \frac{3\lambda(Mb + mc)}{md^2} g\alpha_0 \cos(\Omega t)$$

d'où :

$$\beta(t) = \alpha_0 \left[1 + \frac{3\lambda(Mb + mc)g}{md^2 \Omega^2} \right] (1 - \cos(\Omega t))$$